Thomas Brochhagen – Patricia Naumann – Victor Persien

Ein praktischer Reader zur

Einführung in die Logik

4. April 2012

Vorwort

Der vorliegende Reader wurde als Teil des Teamprojekts zum Logikkurs von Thomas Brochhagen, Patricia Naumann und Victor Persien erstellt. Er soll als Ergänzung zum eigenständigen Lernen und vertiefen der Inhalte des Logikkurses dienen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Reader in keinster Weise als Ersatz für die Sitzungen oder der von dem Dozenten vorausgesetzten Literatur gedacht ist, sondern lediglich das Erwerben des Stoffes erleichtern soll. Die Verfasser schließen nicht aus, dass die jetzige Fassung des Readers kleinere Fehler enthalten könnte oder bestimmte Inhalte nicht deckt. Bei Unsicherheiten wird dem Leser empfohlen seinen Dozenten oder Tutor zu fragen.

Für Vorschläge, Korrekturen und Kommentare sind wir sehr dankbar und unter einer der folgenden Adressen zu kontaktieren:

thomas.brochhagen@hhu.de

patricia.naumann@hhu.de

victor.persien@hhu.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Einleitung zur Anwendbarkeit der Logik 1

2 Mengenlehre **4**
2.1 Mengenlehre Teil A 5
2.1.1 Beziehungen zwischen Mengen 7
2.1.2 Mengenoperationen 8
2.1.3 n-Tupel und das Kartesische Produkt 9
2.2 Mengenlehre Teil B 10
2.2.1 Mengen und deren Eigenschaften 10
2.2.2 Mengenoperationen 11
2.2.3 n-Tupel und das Kartesische Produkt 11

3 Aussagenlogik **12**
3.1 Aussagenlogik Teil A 12
3.1.1 Junktoren 13
3.1.2 Charakterisierung von Aussagen 18
3.2 Aussagenlogik Teil B 19
3.2.1 Symbolinventar der aussagenlogischen Sprache 19
3.2.2 Die Syntax von AL 19
3.2.3 Die Semantik von AL 20
3.2.4 Aussagenlogische Grundbegriffe 20
3.2.5 De Morgan'sche Regeln 20

4 Prädikatenlogik **21**
4.1 Prädikatenlogik Teil A 21
4.1.1 Funktionen in der Prädikatenlogik 22
4.1.2 Das Zeicheninventar der Prädikatenlogik 22
4.1.3 Stelligkeit 23
4.1.4 Prädikatskonstanten 23
4.1.5 Funktionskonstanten 24
4.1.6 Junktoren in der Prädikatenlogik 25
4.1.7 Quantoren 26
4.2 Prädikatenlogik Teil B 27
4.2.1 n-Tupel und Relationen 28
4.2.2 Funktionen 29
4.2.3 Prädikate 29
4.2.4 Quantoren 30

5 Beweisführung **32**
5.1 Prämissen und Konklusion 32
5.2 Gültigkeit und Korrektheit 33
5.2.1 Gültigkeit 33
5.2.2 Korrektheit 33
5.3 Formelle und informelle Beweise 34
5.3.1 Fitch-Kalkül 34
5.3.2 Beweismethoden 41

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einleitung zur Anwendbarkeit der Logik

Die Frage, die euch vermutlich am meisten interessiert ist, „Was hat Logik mit Linguistik zu tun?“. Daraus ergeben sich ebenso Fragen zur Anwendbarkeit der Methoden, die ihr in diesem Kurs lernen werdet, für das spätere Studium. Diese Fragen mit einem Satz zu beantworten ist kaum möglich, daher wollen wir zunächst klären, wo Logik überhaupt her kommt und wozu sie verwendet wird.

Die Logik ist eine Systemwissenschaft, die in der griechischen Antike von Philosophen betrieben wurde. Wahrscheinlich gab es auch schon viel früher in Persien, China und Indien logische Wissenschaften. Im frühen philosophischen Diskurs wurden nicht nur Aussagen auf ihren logische Struktur hin überprüft, sondern vor allem erschien sie schon damals als nützlich, um formale Systeme aufzustellen. Mit Hilfe des logischen Schließens können so systematisch Probleme innerhalb eines Systems gelöst werden. Eines der häufigsten zitierten Systeme, das logisches Schließen verdeutlichen soll, ist das folgende:

a. Alle Menschen sind sterblich.

b. Sokrates ist ein Mensch.

c. Sokrates ist sterblich.

Aus a und b folgt c. Dieses Vorgehen des Schließens wenden wir alle tagtäglich an, beispielsweise beim Lösen eines Sudokus. Durch das Wissen über die Regeln des Sudokuspiels können wir die Ziffern korrekt in die Kästchen eintragen und basierend auf denen, die wir haben, schließen wir auf neue Ziffern. Aber auch bei einfacheren Aufgaben bedienen wir uns logischer Werkzeuge, ohne, dass es uns bewusst ist. Immer wenn wir den nächsten Schritt unseres Handelns durch unser Vorwissen berechnen müssen, nehmen wir ein Modell der Welt zur Hilfe und berechnen die fehlenden Daten, sofern es möglich und sinnvoll erscheint, aus dem Wissen innerhalb dieses Modells.

Solche Systeme werden auch in der Mathematik und Informatik eingesetzt. Doch nicht nur erste Rechenmaschinen und heutige Computer basieren auf logischen Überlegungen. Bereits einige der antiken Philosophen befassten sich ebenfalls mit Sprache und der Grammatik einzelner Sprachen, so beispielsweise einer der berühmtesten Logiker, Aristoteles. Etwa zur gleichen Zeit der Entwicklung der aristotelischen Logik stellte der Grammatiker Pāṇini im antiken Indien für das Sanskrit ein mathematisch basiertes Regelwerk zur Sprache auf. In der Linguistik bedienen wir uns logischen Schlüssen, um von Fakten auf Regelmäßigkeiten zu abstrahieren. So können Grammatiken, Theorien über Sprachen und Sprachfamilien, phonologische Modelle usw. geschrieben und formell überprüft werden.

Interessant wurde das logische Schließen im Laufe der Zeit auch für die Kognitionswissenschaften, die die Planungsvorgänge in unserem Gehirn verstehen wollen. Unter diesen ist auch die Semantik und die Pragmatik teilweise einzuordnen, die sich auch mit logischen Vorgängen innerhalb von Sprache und Konversationen beschäftigen. So wie sich durch Abstraktion von sprachlichen Daten Grammatiken entwickeln lassen, sollen auch Regeln für sprachliche Handlungen gefunden werden. Grob gesagt ist das (idealisierte und simplifizierte) Ziel, dass die Logik in diesem Wissenschaftsfeld verfolgen will, die Sprache des Denkens zu modellieren.

Zu den einzelnen Aspekten der Aussagen- und Prädikatenlogik werden in den nächsten Kapiteln kurze Zusammenfassungen und Querverweise geliefert, die euch im Verlauf des Erwerbs logischer Fähigkeiten und darüber hinaus hoffentlich als hilfreiche Unterstützung und zum Nachschlagen dienen können. Die meisten Kapitel sind in zwei Teile untergliedert. Der erste präsentiert die vorgestellte Konzepte besonders anschaulich. Dies soll einen schnellen Zugang zum Themengebiet erleichtern und somit besonders am Anfang das Frustrationspotential beim aneignen des Stoffes minimieren. Im zweiten Teil kann das erworbene Wissen durch mathematische Beschreibungen und Definitionen erweitert werden, die Begriffe und Zusammenhänge rigoroser präsentieren. Die zweite Variante ist besonders nützlich für formale Strukturierung eigener Theorien jedes Bereichs, besonders jedoch der theoretischen Computerlinguistik und der formalen Semantik. Die Ausdrucksweise in “mathematischer Sprache” soll euch damit schon einmal näher gebracht werden.

Wie dieser Reader zu lesen ist

Die Kapitel dieses Readers können unabhängig voneinander gelesen werden und können damit als Nachschlagewerk dienen. Allerdings bauen sie inhaltlich auch ineinander auf. Das Wissen aus jedem Kapitel kann also für das Lesen des nächsten verwendet werden. Wir haben ganz zu Beginn die Mengenlehre gestellt, da sie zum Verständnis über die Inhalte der Aussagen- und Prädikatenlogik und nicht zuletzt der Beweisführung beiträgt. Außerdem können mit den Inhalten der Mengenlehre besonders schnell einfache Modelle kreiert und diese in Formelhafterweise dargestellt werden. Dies soll also auch zur Einführung in die mathematische Darstellung von Sachverhalten dienen. Jedes Kapitel dieses Readers, außer dem letzten, ist in zwei Teile geteilt. Der Teil A soll einführend Begriffe klären und ist möglichst anschaulich beschrieben. Hier sind viele Beispiele aus der realen Welt untergebracht. Der Teil B fokussiert auf die formal-mathematische Darstellung der vorgestellten Konzepte. Für ein tiefergehendes Interesse an der Materie ist dieser Teil sehr interessant, weil aufbauende Theorien somit besser verständlich werden. Beispielsweise wird Euch Aussagenlogik Teil A in Kapitel 3.1 begegnen. Dort sind viele natürlichsprachliche Beispiele eingebunden, um den speziellen Begriff der Aussagen innerhalb der Aussagenlogik zu verdeutlichen. In Aussagenlogik Teil B in Kapitel 3.2 wird noch einmal genauer auf die Syntax und Wohlgeformtheit der logischen Aussagen eingegangen. Hier finden sich Definitionen, Auflistungen und Regeln. Das selbe Schema findet sich in den Abschnitten Mengenlehre in Kapitel 2 und Prädikatenlogik in Kapitel 4. Das Kapitel 5 über Beweisführung ist nicht in diese zwei Teile geteilt, da die Idee der Beweisführung direkt auf die formale Darstellung von Beweisen hinführt.

Kapitel 2

Mengenlehre

Warum Mengenlehre? Zugegeben: Man kann die grundlegenden Konzepte der Aussagen- und Prädikatenlogik auch ohne Mengenlehre verstehen. Dennoch soll hier ein kurzer Einblick in eben diese gegeben werden, denn sie ermöglicht es, die Elemente der Prädikatenlogik von einer anderen Warte aus zu betrachten. Mengen stellen ein einfach zu verstehendes mathematisches Konzept dar, welches gleichzeitig auch ein sehr mächtiges Mittel zur Beschreibung ist. Einmal verstanden kann man überall Mengen „sehen“. Auch die Grundbegriffe der Aussagen- und Prädikatenlogik, wie zum Beispiel *Prämisse* oder *Funktion*, lassen sich auf Begriffe der Mengenlehre reduzieren.

In der Mathematik (im weitesten Sinne) ist so ziemlich alles eine Menge und so lässt sich auch so ziemlich alles formal als Menge beschreiben, etwa die Menge aller Kirchen im Dorf, die Menge der unsortierten Zettel auf dem Schreibtisch, die Menge aller Laute des Hawaiianischen als Teilmenge aller Laute der Sprachen der Welt als Teilmenge der Menge aller überhaupt möglichen Laute, oder auch die Menge aller Schnolpf-Außenposten im Gnarf-Delta des Glupps-Universums.

Doch was ist genau eine Menge? Eine Menge ist in ihrer grundlegenden Form einfach eine ungeordnete Sammlung an Dingen, genannt Elemente. Es gibt nur eine einzige Spielregel zu beachten: Eine Menge darf sich nicht selbst als Element beinhalten. Ansonsten war’s das im Groben. Und so ist auch ersichtlich, warum sich so viele Dinge auf der Welt als Mengen beschreiben lassen. Und das ist es ja, was wir als Wissenschaftler wollen: Die Phänomene der Welt um uns herum in ein verallgemeinerbares System packen. Die Mengenlehre scheint also perfekt auf unsere Bedürfnisse zugeschnitten zu sein.

Der Begriff *Mengenlehre* ist an sich ambig, d.h. mehrdeutig. Er bezeichnet zum Einen die generelle Beschäftigung mit Mengen und zum Anderen spezifische Paradigmen zum Umgang mit Mengen. Das heißt, man könnte sagen, die Mengenlehre habe mehrere Mengenlehren hervorgebracht, etwa die von Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre oder die Zermelo-Fränkel-Mengenlehre (ZF). ZF ist die heute gebräuchlichste Mengenlehre. Sie besteht aus 8 (mit einer Erweiterung 9) Axiomen, also Forderungen, welche den dort vertretenen Mengenbegriff definieren. Hier soll allerdings nicht ZF vorgestellt werden, da dies einiges an Vorkenntnissen in PL1 erfordern würde. Stattdessen soll ein naiver Ansatz verfolgt werden, der Mengen auf einfache Weise definiert, sodass wir schnell mit den grundlegenden Mengenoperationen arbeiten können, und sich gleichzeitig nicht mit den gängigen Mengenlehren widerspricht.

Im Folgenden soll nun also eine Definition für den Begriff *Menge* gefunden und die grundlegendsten Eigenschaften von und Operationen auf Mengen, etwa Vereinigung oder Durchschnitt, vorgestellt werden.

2.1 Mengenlehre Teil A

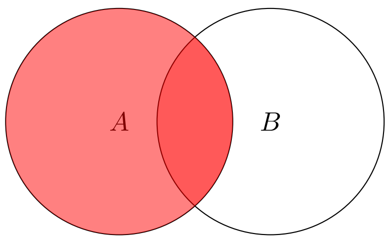
Eine *Menge* ist eine Gruppierung beliebiger Objekte. Diese Objekte werden als *Elemente* bezeichnet. Elemente können jeglicher Natur sein und müssen nicht in irgendeiner Bedeutungsbeziehung zueinander stehen. Mengen begegnen uns jeden Tag: Die Menge der Produkte im Einkaufswagen, die Menge der Studenten an unserer Universität, die Menge der Wolpertinger in den bayerischen Wäldern (man mutmaßt, diese Menge sei leer!), die Menge der Phone eines Phoninventars einer Sprache als Teilmenge der Menge der Phone der Sprachen der Welt als Teilmenge der möglichen Laute, uvm.

Beispielsweise kann eine Menge von Produkten, die gekauft wurden (Brötchen, Käse, Tofu, Öl, Paprika und Champignons) mit einem beliebigen Symbol (als Abkürzung für die Menge) versehen werden - in diesem Fall nehmen wir einfach A.

Beispiel 1.
$A = \left\{\textit{Brötchen}, \textit{Käse}, \textit{Tofu}, \textit{Öl}, \textit{Paprika}, \textit{Champignons}\right\}$

Diese Schreibweise sagt aus, dass die Menge A, die Elemente *Brötchen*, *Käse*, *Tofu*, *Öl*, *Paprika* und *Champignons* enthält. Die Elemente einer Menge werden innerhalb von geschweiften Klammern angegeben (siehe *Beispiel 1*). Eine Menge ist ungeordnet, sodass die Reihenfolge der Elemente in ihr keine Rolle spielt.

Mengen können auch graphisch durch *Venn-Diagramme* dargestellt werden. Die Kreise stellen Mengen dar und die Farbe simbolysiert das, worauf man sich bezieht. In diesem Fall werden zwei Mengen A und B dargestellt und A ist hervorgehoben, weil wir uns im vorherigen Abschnitt auf A bezogen haben.



Wie bereits erwähnt können die Elemente einer Menge alles mögliche sein: Dinge, Gefühle, Farben, Menschen, Nummern, etc.. Zwei Mengen sind nur dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
Wenn B also aus folgenden Elemente besteht;

Beispiel 2.
$B = \left\{\textit{Käse}, \textit{Champignons}, \textit{Paprika}, \textit{Öl}, \textit{Tofu}, \textit{Brötchen}\right\}$

dann ist $A = B$, weil A und B dieselben Elemente enthalten.

Pro Menge wird ein Element nur einzeln '*gezählt*', sodass die Menge $\{Tofu, Tofu, Tofu\}$ nur ein Element enthält - nämlich *Tofu*.

Beispiel 3.
$C = \{\mathit{Tofu}, \mathit{Tofu}, \mathit{Tofu}\} = \{\mathit{Tofu}\}$

Elemente
Wenn man sagen will, dass ein Element einer Menge zugehört, dann wird das Zeichen $\in$ verwendet (gesprochen *Element von*). Käse ist ein Element der Menge A, also kann dies wie folgt notiert werden: $\mathit{Käse} \in A$ („*Käse* ist ein Element von A").

Kardinalität
Die Anzahl aller Elemente einer Menge wird als *Mächtigkeit* oder *Kardinalität* bezeichnet und mit den Betragsstrichen | | gekenntzeichnet. Für unsere Menge B gilt also $|B| = 6$.

Implizite und explizite Notation von Mengen
Mengen können entweder *explizit* (d.h. jedes Element einzeln auflistend) oder *implizit* (d.h. durch eine Charakterisierung der Elemente der Menge) beschrieben werden. Die explizite Form wird meist dann genutzt, wenn die Menge der Elemente zählbar ist (und auch dann nur, wenn sie relativ klein ist). Die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 3 kann entweder explizit oder implizit notiert werden:

a. Explizit als $E = \{1, 2, 3\}$

b. Implizit als $E = \{x | x \textit{ ist eine natürliche Zahl von } 1 \textit{ bis } 3\}$

Praktisch (bzw. notwendig) ist die implizite Schreibweise, wenn die Elemente nicht einzeln aufzählbar sind oder der Zeitaufwand zu groß ist.

Die Notation von E in (b) wird folgenderweise gelesen und verstanden:

> $E = \{x | x \textit{ ist eine natürliche Zahl von } 1 \textit{ bis } 3\}$
>
> E ist die Menge aller x, für die gilt, dass x eine natürliche Zahl von 1 bis 3 ist.

In dieser Schreibweise befindet sich in der Menge $\{\ldots|\ldots\}$ auf der linken Seite des senkrechten Strichs eine oder mehrere Variablen und auf der rechten die Bedingung, die die zugehörigen Elemente der Menge erfüllen. In dem Beispiel ist diese Bedingung die Eigenschaft eine natürliche Zahl von 1 bis 3 zu sein.

Beispiel 4. Bekannte Mengen aus der Mathematik: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$
$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{x | x = \frac{m}{n},\ f\ddot{u}r\ die\ gilt\ m, n \in \mathbb{Z}\ und\ n\ \neq\ 0\right\}$$

Die Menge aller Menschen: $G = \{x \mid x\ ist\ ein\ Mensch\}$

Die Menge aller Frauen: $F = \{x \mid x\ ist\ ein\ weiblicher\ Mensch\}$

Die Menge aller Primzahlen
$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}\ oder\ \{x | x\ ist\ eine\ Primzahl\}$

Leere Menge
Die letzte wichtige Eigenschaft, die Mengen im Allgemeinen besitzen, ist ihr Bezug zur leeren Menge. Die *leere Menge* ist diejenige Menge, die keine Elemente enthält. Es gibt genau eine leere Menge und sie wird entweder als zwei geschweifte Klammern $\{\}$ oder mit dem Symbol $\varnothing$ notiert.

2.1.1 Beziehungen zwischen Mengen

Teilmenge
Eine Menge A, die einzig aus Teilen einer anderen Menge B besteht, also nur Elemente enthält, die die andere Menge auch enthält, bezeichnet man als *Teilmenge* von B und schreibt $A \subseteq B$. Gilt beispielsweise $B = \left\{\textit{Brötchen}, \textit{Paprika}, \textit{Öl}\right\}$ und $A = \left\{\textit{Brötchen}, \textit{Öl}\right\}$, dann ist A eine Teilmenge von B. Anders wäre es, wenn A noch ein Element enthalten würde, welches B nicht enthält, dann wäre A keine Teilmenge von B.

Es wird häufig zwischen einer Teilmenge und einer *echten Teilmenge* unterschieden, wobei mit „Teilmenge" gemeint ist, dass es sich um eine „Teilmenge oder die gleiche Menge" handelt und mit „echter Teilmenge" eine Teilmenge bezeichnet wird, die nicht identisch mit der anderen Menge ist. Die echte Teilmenge kann auch durch das Symbol $\subset$ bezeichnet werden, doch häufig wird ihr besonderer Status durch das Symbol $\subsetneq$ hervorgehoben und somit von anderen Teilmengen abgegrenzt.

Aufgrund der häufigen Verwechslung sei hier noch erwähnt, dass, wenn A eine Teilmenge von B ist, A nicht *Element* von B ist. $B = \left\{\textit{Brötchen}, \textit{Paprika}, \textit{Öl}\right\}$ und $B' = \left\{\textit{Brötchen}, \left\{\textit{Paprika}, \textit{Öl}\right\}\right\}$ sind zwei verschiedene Mengen. B enthält *Brötchen*, *Paprika* und *Öl* als Elemente und B' enthält *Brötchen* und eine weitere Menge, die wiederum *Paprika* und *Öl* enthält. Man kann sich das vorstellen, wie ein Sack in einem Sack. Die Mächtigkeit der beiden Mengen ist auch unterschiedlich, so ist $|B| = 3$, aber $|B'| = 2$, denn die weitere Menge, die B' enthält ist schließlich ein einzigen Element von B'.

Einen besonderen Status hat hier die *leere Menge*, denn sie ist Teilmenge (aber nicht Element!) *jeder* Menge.

Beispiel 5. Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge M. $\varnothing \subseteq \mathrm{M}$.

Jede Menge ist eine Teilmenge von sich selbst. $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{M}$, da alle Elemente von M die Eigenschaft besitzen, in M enthalten zu sein.

Die Menge aller weiblichen Menschen (F) ist eine Teilmenge der Menge aller Menschen (G). $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{G}$.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Dementsprechend ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

Potenzmenge
Ein weiterer Begriff hilft uns dabei, eine besondere Art von Teilmengengruppierung hervorzuheben; die *Potenzmenge* ($\wp$). Diese ist die Menge aller Teilmengen einer bestimmten Menge. Das heißt, dass die Elemente der Potenzmenge ausschließlich Mengen sind. Um die Anzahl der Teilmengen einer Menge zu errechnen, nutzen wir die Formel 2^n, bei der n gleich der Anzahl der Elemente der Menge ist.

Zur Exemplifizierung nutzen wir die Menge E ($E = \{1, 2, 3\}$). Da E drei Elemente enthält, ist die Anzahl seiner Teilmengen $2^3 = 8$:
$\wp(E) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$

Jedes Element ist Teilmenge von E, ebenso die resultierenden Teilmengen aus der Kombination mehrerer Elemente. Da die leere Menge eine Teilmenge jeder Menge ist, gehört sie auch zur Potenzmenge jeder Menge.

2.1.2 Mengenoperationen

Vereinigung
Die *Vereinigung* ($\cup$) zweier Mengen ist die Gesamtheit der Elemente beider Mengen und formt somit eine neue Menge. $A \cup E$ (*A vereinigt mit E*) besteht aus allen Elementen aus A (Einkäufe) und E (Zahlen von 1 bis 4).

Beispiel 6.
$A \cup E = \Big\{\textit{Brötchen}, \textit{Käse}, \textit{Tofu}, \textit{Öl}, \textit{Paprika}, \textit{Champignons}, 1, 2, 3, 4\Big\}$
$A \cup A = A$
$A \cup \varnothing = A$

Schnittmenge
Die *Schnittmenge* ($\cap$) zweier Mengen enthält all die Elemente, die sowohl in der einen, als auch in der anderen Menge, vorkommen. $A \cap C$ („A geschnitten mit C") besteht aus den Elementen, die sowohl in A als auch in C vorkommen.

Beispiel 7.
$A = \Big\{Brötchen, Käse, Tofu, \text{Öl}, Paprika, Champignons\Big\}$
$C = \{Tofu\}$

Da nur das Element *Tofu* in beiden Mengen vorkommt, ist $A \cap C = \{Tofu\}$.

Differenz
Die *Differenz* ($\setminus$) zweier Menge ist die Menge aller Elemente, die in der einen

- nicht aber in der anderen Menge vorkommen. $A \setminus C$ („A ohne C") entspricht also der Menge, die alle Elemente enthält, die in A vorkommen, ohne in C vorzukommen. Da das Element *Tofu* in beiden Mengen vorkommt, ist $A \setminus C = \left\{Brötchen, Käse, Öl, Paprika, Champignons\right\}$.

2.1.3 n-Tupel und das Kartesische Produkt

Tupel

Ein *n-Tupel* ist eine endliche Liste aus Objekten $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Der Index der Objekte gibt den Objekten eine bestimmte Position, die sie als Glieder dieser Liste einnehmen. In einem n-Tupel können sich, im Kontrast zu einer Menge, mehrere gleiche Objekte befinden, da diese immer noch durch ihre Position unterschieden werden. Ein n-Tupel mit zwei Objekten wird *geordnetes Paar* oder schlicht *Tupel*, eins mit drei Objekten *Tripel*, …, und eins mit n Objekten *n-Tupel* genannt. Zwei n-Tupel sind genau dann gleich, wenn sie als jeweilige Glieder an derselben Position dieselben Elemente enthalten.

$\langle 1, 2 \rangle$ ist ein geordnetes Paar, in dem 1 das erste, und 2 das zweite Glied des Paares ist. $\langle a, Pterodactylus, Sonnenblume \rangle$ ist ein Tripel das als erstes Glied ein a, als zweites ein Pterodactylus und als drittes eine Sonnenblume enthält.

Beispiel 8.
Vergleiche:
$\langle 2, 1 \rangle \neq \langle 1, 2 \rangle$, aber $\{2, 1\} = \{1, 2\}$

Kartesisches Produkt

Seien zwei Mengen M und N gegeben, dann kann man beide multiplizieren (also das Produkt bilden), um eine neue Menge $M \times N$ („M Kreuz N"), genannt *kartesisches Produkt*, zu erzeugen. Ein kartesisches Produkt zweier Mengen entspricht der Menge von Tupeln aus beiden Mengen, bei dem das erste Glied des Tupels jeweils von der Menge M und das zweite von der Menge N stammt.

Aus den Mengen H und I kann eine Menge aus (geordneten) Tupeln gebildet werden, welche sich jeweils aus den Elemente von H mit I zusammensetzt. Da $H \times I$ zwei Mengen miteinander verbindet, wird eine Menge aus mehreren geordneten Paaren der Form $\langle x, y \rangle$ entstehen (die Anzahl der entstehenden Tupel entspricht dem Produkt der Anzahl der Elemente beider Mengen). Für jedes Paar $\langle x, y \rangle$ wird das x jeweils aus der Menge H stammen und y aus der Menge I.

Beispiel 9.
$H = \{Anna, Berta\}$, $I = \{Anton, Bernd, Christoph\}$. Da H zwei Elemente enthält und I drei, wird das kartesische Produkt beider Mengen sechs Tupel enthalten:

$$H \times I = \left\{ \begin{array}{l} \langle Anna, Anton \rangle, \\ \langle Anna, Bernd \rangle, \\ \langle Anna, Christoph \rangle, \\ \langle Berta, Anton \rangle, \\ \langle Berta, Bernd \rangle, \\ \langle Berta, Christoph \rangle \end{array} \right\}$$

Beispiel 10. $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle\}$

$$\{3,4\} \times \{1,2\} = \{\langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$$

$$\{1,2\} \times \{3,4\} \neq \{3,4\} \times \{1,2\}$$

$$\{3,4\} \times \{1,2\} = \{4,3\} \times \{2,1\}$$

2.2 Mengenlehre Teil B

2.2.1 Mengen und deren Eigenschaften

Für eine *Menge* gilt:

1. Ein Objekt a ist ein *Element* einer Menge M ($a \in M$), gdw. M a enthält.
2. Zwei Mengen sind identisch ($M = N$), gdw sie dieselben Elemente enthalten.

Polaritätspinzip
Das *Polaritätsprinzip* besagt, dass für jedes Element a entweder $a \in M$ oder $a \notin M$ gilt.

Leere Menge
Aus der zweiten angeführten Eigenschaft von Mengen folgt, dass es nur eine Menge geben kann, welche keine Elemente enthält (da alle anderen Mengen ohne Elemente mit dieser Menge identisch sind): Die *Leere Menge*. Sie weist folgende Eigenschaften auf:

1. Ihre einzige Teilmenge ist die leere Menge: Wenn $M \subseteq \varnothing$, dann ist $M = \varnothing$
2. Ihre Potenzmenge ist eine Menge, die die leere Menge enthält: $\wp(\varnothing) = \varnothing$
3. $|\varnothing| = 0$

Für eine beliebige Menge M gilt:

1. Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge: $\varnothing \subseteq M$
2. Die Vereinigung einer Menge mit der leeren Menge ist gleich der Menge: $M \cup \varnothing = M$
3. Der Durchschnitt zwischen der leeren Menge und einer Menge ist gleich der leeren Menge: $M \cap \varnothing = \varnothing$

Teilmenge
N ist eine *Teilmenge* von M, gdw alle Elemente von N in M enthalten sind: $N \subseteq M$ gdw für alle Elemente x gilt, dass $x \in N$ und $x \in M$ $N \subset M$ gdw $N \subseteq M$ und $N \neq M$ Folgende Eigenschaften gelten für die Teilmengenbeziehung:

- Reflexivität: $M \subseteq M$
- Identität: wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$, dann ist $M = N$
- Transitivität: wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq O$, dann ist $M \subseteq O$

Potenzmenge
Die *Potenzmenge* ist die Menge aller Teilmengen einer Menge. Die Potenzmenge einer Menge M ist definiert als Menge aller Ps, für die gilt, dass P eine Teilmenge von M ist: $\wp(M) =_{df} \{P \mid P \subseteq M\}$.

2.2.2 Mengenoperationen

Vereinigung
Die *Vereinigung* von Mengen ist die Menge aller Elemente, die in mindestens einer der vereinigten Mengen vorkommen. $M \cup N =_{df} \{x \mid x \in M \ und/oder \ x \in N\}$.

Durchschnitt
Die *Schnittmenge* von Mengen ist die Menge der Elemente, die in jeder geschnittenen Menge vorkommen. $M \cap N =_{df} \{x \mid x \in M \ und \ x \in N\}$.

Differenz
Die *Differenz* von zwei Mengen M und N ist die Menge der Elemente die in M, aber nicht in N enthalten sind. $M \setminus N =_{df} \{x \mid x \in M \ und \ x \notin N\}$.

2.2.3 n-Tupel und das Kartesische Produkt

Tupel
Die Eigenschaften eines *Tupels* sind:

1. Ein Tupel kann mehrere Vorkommnisse desselben Objekts enthalten.
2. Die Elemente eines Tupels sind geordnet.
3. Ein Tupel ist eine endliche Liste aus Elementen.

Kartesisches Produkt
Für das *Kartesische Produkt* zweier Mengen M und N gilt,
$M \times N =_{df} \{\langle x, y\rangle \mid x \in M, \ y \in B\}$.
$M_1 \times M_n =_{df} \{\langle x_1, ..., x_n\rangle \mid x_1 \in M_1, ..., x_n \in M_n\}$.

Kapitel 3

Aussagenlogik

Die Aussagenlogik ist der erste Stein, den wir benötigen, um unser angestrebtes logische System aufzubauen. Wie erwartet ist der erste Stein häufig von geringem Nutzen ohne die Steine, die auf ihm bauen werden. Dennoch ist die Aussagenlogik als Basis für ein reicheres System unabdingbar. Um beim Bild des Steines zu bleiben; die Aussagenlogik allein ist zwar stark, aber als Hilfsmittel doch sehr begrenzt. Deshalb sollte man während des Aneignens dieses Inhalts nicht daran verzagen, dass man den tieferen Sinn dahinter nicht sieht - denn dieser ist häufig erst sichtbar, nachdem der Stein steht und schon der nächste folgt. Der Metaphern überdrüssig jetzt aber kurz noch das, was die Aussagenlogik ist: sie ist ein Teilgebiet der Logik, welches sich mit Aussagen und deren Verknüpfung befasst. Da wir ein System anstreben, welches komplexe Sätze in die logische Sprache übersetzen kann, um (vor allem) Schlüsse aus ihnen zu ziehen, ist es demnach unverzichtbar zu wissen, wie wir zwei Aussagen verknüpfen können, oder wie wir aussagen, dass eine Aussage das Gegenteil der anderen aussagt. Genau dies ist der Hauptbestandteil der Aussagenlogik!

3.1 Aussagenlogik Teil A

Aussagen
In der Aussagenlogik versteht man unter *Aussage* einen Satz oder einen Ausdruck, der entweder wahr oder falsch ist (es muss nicht unbedingt praktisch überprüfbar sein - aber die Möglichkeit muss existieren). Es gibt somit keine Graduierbarkeit oder fehlende Eindeutigkeit in der Bestimmung des Wahrheitswertes einer Aussage. Jede Aussage muss einem der beiden Werten, wahr oder falsch, zugeordnet werden können. Unsere aussagenlogische Sprache kennt keine Mitte zwischen 'wahr' und 'falsch' - eine Welt, die nur schwarz und weiß ist, wenn man so will. In der Aussagenlogik wird einer Aussage ein Symbol zugewiesen, um stellvertretend für diese zu fungieren. Beispielsweise können wir festlegen:

- P: Stegosaurier sind Dinosaurier
- Q: Apatosaurier sind Pflanzenfresser

Sowohl P, als auch Q sind Aussagen, da man ihnen einen eindeutigen Wahrheitswert zuordnen kann (d.h. man kann sagen ob die Aussagen wahr oder falsch sind) und stehen stellvertretend für die oben definierten Ausdrücke.

Einige Beispiele von Sätzen, die keine Aussagen sind, weil ihnen kein Wahrheitswert zugeordnet werden kann:

- $\mathbb{N}$
- Was ist der Sinn des Lebens?
- Strecke deine Hände aus!

Wenn mehrere Aussagen verknüpft werden, spricht man von einer komplexen Aussage. Der Warheitswert (ob die komplexe Aussage wahr oder falsch ist) ergibt sich aus den Wahrheitswerten seiner Teilaussagen und der Art ihrer Verknüpfung.

Wahrheitswerte und Bewertungen
Aussagen wird immer ein *Wahrheitswert* (WW) als dessen Bedeutung (Semantik) zugeordnet. In der klassischen Aussagenlogik haben Aussagen entweder den Wert '*wahr*', der mit einer '1' bezeichnet wird, oder den Wert '*falsch*', der der '0' entspricht. Wenn einer Aussage ein konkreter WW zugewiesen wird, spricht man von dessen *Bewertung*, die mit doppelten, eckigen Klammern symbolisiert wird. Der Klammer folgend wird die konkrete Bewertung der Aussage hochgestellt notiert.

'$[\![A]\!]^V = 0$' ist der Wahrheitswert der Aussage A unter der Bewertung V (in diesem Fall also ist der WW *falsch*, weil er mit einer null gekennzeichnet ist). Wenn wir uns vorstellen, dass unsere hiesige Welt zum jetzigen Wissensstandpunkt eine bestimmte Bewertung (d.h. ein 'bestimmter Fall') ist, so können wir diesen Fall als V ('V' für *value*) bezeichnen und dann können wir beispielsweise die Aussage '*Stegosaurier sind Dinosaurier*' (hier als P abgekürzt) auf ihren Wahrheitswert überprüfen: $[\![P]\!]^V = 1$. Die Aussage ist wahr, da Stegosaurier tatsächlich Dinosaurier sind.

3.1.1 Junktoren

Junktoren/Operatoren sind die Mittel und Werkzeuge, derer wir uns bedienen, um komplexe Aussagen zu bilden und uns einer etwas reicheren (formalen) Sprache zu nähern. Sie sind vergleichbar mit den bekannten Operatoren der Mathematik: +, -, *, /, usw. Die zwei wichtigsten Aspekte für den Umgang mit den Operatoren sind:

1. Sie sind *wahrheitsfunktional*. D.h., dass sich der Wahrheitswert der komplexen Aussage, die sie bilden, aus dem Wahrheitswert der einzelnen Teilaussagen und dem Junktor ergibt.

2. Sie sind jeweils auf eine vorbestimmte Anzahl von Aussagen anwendbar. Wenn wir mit Junktoren umgehen, müssen wir beachten, dass wir die korrekte Anzahl von Aussagen mit ihnen verknüpfen. Um die Analogie zu den bekannten mathematischen Operatoren zu behalten: Die Summe verknüpft zwei Zahlen und ergibt eine dritte. Es ist nicht möglich mehr als zwei numerische Werte mit dem Summenzeichen zu verknüpfen. Dasselbe gilt für die Junktoren.

Negation
Die *Negation* (¬, gesprochen '*non*' oder *nicht*') einer Aussage ist die Verneinung dieser. Wenn eine Aussage wahr ist, dann ist dessen Negation falsch und wenn eine Aussage falsch ist, dann ist dessen Negation wahr. Die Negation kehrt somit den ursprünglichen Wahrheitswert der Aussage um (wahr zu falsch, falsch zu wahr). Angenommen, dass

P: Stegosaurier sind Dinosaurier

a. dann ist P wahr, gdw Stegosaurier Dinosaurier sind

a. P ist falsch, gdw es nicht der Fall ist, dass Stegosaurier Dinosaurier sind

Die Negation der Aussage P wird mit ¬P bezeichnet und für diese neue Aussage ('*Es ist nicht der Fall, dass Stegosaurier Dinosaurier sind*') gilt, dass

a. ¬P wahr ist gdw P falsch ist (Es ist nicht der Fall, dass Stegosaurier Dinosaurier sind)

b. ¬ P falsch ist gdw P wahr ist (Stegosaurier sind Dinosaurier)

Allgemein gilt entsprechend: ¬A ist wahr gdw A falsch ist.

Dieser Operator kann mehrfach hintereinander auf dieselbe Aussage angewandt werden:

¬¬P ist die Negation der Negation von P, d.h. ¬¬P ist wahr gdw P wahr ist.

¬¬¬P ist die Negation der Negation der Negation von P, d.h. ¬¬¬P ist wahr gdw. P falsch ist.

usw

Merken sollte man sich also, dass ¬P immer den gegenteiligen Wert von P hat.

Konjunktion
Die *Konjunktion* (∧, gesprochen '*und*') verknüpft zwei Aussagen miteinander. Diese neue komplexe Aussage, die sich aus der Verbindung beider Teilaussagen durch die Konjunktion ergibt, ist nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Wenn eine oder gar beide Teilaussagen falsch sind, dann ist die gesamte komplexe Aussage auch falsch. Angenommen, dass

P: Stegosaurier sind Dinosaurier

Q: Apatosaurier sind Pflanzenfresser

dann gilt für (P ∧ Q) (gesprochen '*P und Q*' bzw. '*Stegosaurier sind Dinosaurier und Apatosaurier sind Pflanzenfresser*):

a. (P ∧ Q) ist wahr, gdw sowohl P (Stegosaurier sind Dinosaurier), als auch Q (Apatosaurier sind Pflanzenfresser) wahr ist.

b. (P ∧ Q) ist falsch, gdw P falsch ist (es ist nicht der Fall, dass Stegosaurier Dinosaurier sind), Q falsch ist (es ist nicht der Fall, dass Apatosaurier Pflanzenfresser sind) oder sowohl P als auch Q falsch sind.

Merken sollte man sich also, dass (P ∧ Q) nur dann wahr ist, wenn beide Teilaussagen wahr sind. In allen anderen Fällen ist die komplexe Aussage (P ∧ Q) falsch.

Disjunktion
Die *Disjunktion* (∨, gesprochen '*oder*') verknüpft zwei Aussagen miteinander. Diese neue komplexe Aussage, die sich aus der Verbindung beider Teilaussagen durch die Disjunktion ergibt, ist nur dann falsch, wenn beide Teilaussagen falsch sind. Wenn eine oder gar beide Teilaussagen wahr sind, dann ist die gesamte komplexe Aussage wahr. Angenommen, dass P und Q zwei Aussagen sind,

P: Stegosaurier sind Dinosaurier

Q: Apatosaurier sind Pflanzenfresser

dann gilt für (P ∨ Q) (gesprochen '*P oder Q*' bzw. '*Stegosaurier sind Dinosaurier oder Apatosaurier sind Pflanzenfresser*'):

a. (P ∨ Q) ist wahr, gdw P wahr ist (Stegosaurier sind Dinosaurier), Q wahr ist (Apatosaurier sind Pflanzenfresser) oder sowohl P als auch Q wahr sind.

b. (P ∨ Q) ist falsch, gdw sowohl P als auch Q falsch sind (Es ist weder der Fall, dass Stegosaurier Dinosaurier sind noch, dass Apatosaurier Pflanzenfresser sind).

Merken sollte man sich also, dass (P ∨ Q) nur dann falsch ist, wenn beide Teilaussagen falsch sind. In allen anderen Fällen ist die komplexe Aussage (P ∨ Q) wahr.

Subjunktion
Die *Subjunktion* (→, gesprochen '*Pfeil*') verknüpft zwei Aussagen miteinander. Diese neue komplexe Aussage, die sich aus der Verbindung beider Teilaussagen durch die Subjunktion ergibt, ist nur dann falsch, wenn die vorausgehende Teilaussage (das Antezendenz) wahr ist und die zweite Teilaussage (das Sukzedenz) falsch. Wenn die vorausgehende Teilaussage falsch ist, oder beide Aussagen wahr sind, dann ist auch die komplexe Aussage wahr. Angenommen, dass P und Q zwei Aussagen sind, dann gilt für (P → Q) (gesprochen '*P Pfeil Q*'):

a. (P → Q) ist wahr, gdw P falsch ist oder wenn sowohl P als auch Q wahr sind.

b. (P → Q) ist falsch, gdw P wahr und Q falsch ist.

Merken sollte man sich also, dass (P → Q) falsch ist, wenn P wahr ist und Q falsch. In allen anderen Fällen ist die komplexe Aussage (P → Q) wahr.

Bijunktion
Die *Bijunktion* (↔, gesprochen '*Doppelpfeil'*) verknüpft zwei Aussagen miteinander. Diese neue komplexe Aussage, die sich aus der Verbindung beider Teilaussagen durch die Bijunktion ergibt, ist immer nur dann wahr, wenn beide Teilaussagen denselben Wahrheitswert haben. Angenommen, dass P und Q zwei Aussagen sind, dann gilt für (P ↔ Q) (gesprochen '*P Doppelpfeil Q*'):

a. (P ↔ Q) ist wahr, gdw entweder sowohl P als auch Q wahr sind oder sowohl P als auch Q falsch sind.

b. (P ↔ Q) ist falsch, gdw P und Q unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

Merken sollte man sich also, dass (P $\leftrightarrow$ Q) nur dann wahr ist, wenn beide Teilaussagen denselben Wahrheitswert haben. In allen anderen Fällen ist die komplexe Aussage (P $\leftrightarrow$ Q) falsch.

Wahrheitstafeln

Wahrheitstafeln sind ein hilfreiches Mittel, um die Bewertungen unterschiedlicher Aussagen und Junktoren kompakt und übersichtlich darzustellen. Es werden so viele Spalten wie Aussagen aufgeschrieben; eine Spalte für jede Teilaussage und, wenn vorhanden, eine für jede komplexe Aussage. In jeder Spalte werden die möglichen Wahrheitswerte für die Aussage notiert. Die Anzahl der möglichen Wahrheitswerte für jede Aussage ergibt sich aus der Formel 2^n, bei der n die Anzahl unterschiedlicher Aussagen ist, die in der Wahrheitstafel vorkommen werden. Der Wert 0 steht für '*falsch*' und 1 für '*wahr*. Eine beliebige Aussage 'A' hat die zwei möglichen Wahrheitswerte *wahr* und *falsch*, weil jede Aussage grundsätzlich beide Bewertungen annehmen könnte. Wenn wir nun die Negation dieser Aussage '¬A' in einer Wahrheitstafel darstellen wollen, so schreiben wir eine neue Spalte für '¬A' auf, in der für jede Zeile, in der 'A' wahr ist '¬A' falsch ist (dies Ergibt sich aus der Eigenschaft der Negation). Die Wahrheitstafel wird entsprechend 2^1 Zeilen haben, weil es nur eine Aussage gibt, nämlich 'A'. Das Ergebnis sieht wie folgt aus:

A	¬A
1	0
0	1

Zum Ins-Gedächtnis-Rufen sind Wahrheitstafeln sehr nützlich. Man sollte die Eigenschaften der Junktoren kennen, aber das aufschreiben der Wahrheitstafel für die Aussagen ist häufig ein kräftige Hilfe beim Errechnen von Wahrheitswerten. Hier folgen die Wahrheitstafel der restlichen Junktoren:

A	B	A ∧ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	A ∨ B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	A → B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Äquivalenzen und Umformungsregeln

Viele logische Operationen lassen sich durch unterschiedliche Umformungen darstellen. Oft ist ein Kalkül einfacher zu lesen oder zu lösen, wenn wir die komplexe Aussagen erstmal in eine *angenehmere* Form bringen. Alle Äquivalenzen lassen sich anhand der Erstellung der jeweiligen Wahrheitstafeln überprüfen und nachvollziehen.

De Morgan'sche Regel
Die wohl bekanntesten Umformungsregeln der Aussagenlogik sind die *De Morgan'schen Gesetze*. Sie dienen der Ausklammerung von Negation bzw. dessen Einbindung innerhalb der Klammern.

- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Weitere Äquivalenzen und Gesetzmäßigkeiten sind:

Assoziativität:

- $x \wedge (y \wedge z)\ (x \wedge y) \wedge z$
- $x \vee (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \vee z$

Kommutativität:

- $x \wedge y \Leftrightarrow y \wedge x$
- $x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$

Distribution:

- $x \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Doppelte Negation:

- $\neg\neg x \Leftrightarrow x$

Satz vom ausgeschlossenen Dritten:

- ‘$[\![x \vee \neg x]\!] = 1$’

Satz vom Widerspruch:

- '$[\![\neg(x \wedge \neg x)]\!] = 1$'

Weitere Konsequenz des Satzes des Widerspruchs:

- '$[\![x \wedge \neg x]\!] = 0$'

3.1.2 Charakterisierung von Aussagen

Wir können Aussagen abhängig von ihren möglichen Wahrheitswerten in unterschiedliche Kategorien einordnen. So sind wir in der Lage Aussagen näher zu charakterisieren, Äquivalenzrelationen aufzustellen und einfacher mit ihnen umzugehen.

Tautologie
Eine *Tautologie* ist, grob gesagt, eine Aussage, die immer wahr ist. Auch in der Alltagssprache werden Tautologien häufig genutzt. Die Aussage '*Es regnet oder es regnet nicht*' ist immer wahr; entweder es regnet und sie ist wahr oder es regnet nicht und sie ist wahr. Die Entsprechung dieses Satzes in der Aussagenlogik ist (P ∨ ¬P) (Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten). Um zu überprüfen ob dieser Satz eine Tautologie ist, können wir eine Wahrheitstafel aufstellen:

P	P	∨	¬P
1	1	1	0
0	0	1	1

Wie man sieht, ist die Spalte, die die Bewertung für die komplexe Aussage (P ∨ ¬P) angibt, nur mit Einsen gefüllt. Dies bedeutet, dass es keinen möglichen Fall gibt, in dem die Aussage falsch ist. Sobald eine Fall auftaucht, in dem die Aussage falsch ist, ist sie keine Tautologie mehr. Die Eigenschaft immer wahr zu sein verdanken die Tautologien nicht dem Inhalt der Aussagen (also wofür sie letztendlich stehen), sondern der Art ihrer Verknüpfung (also den Junktoren).

Erfüllbarkeit
Eine Aussage ist *erfüllbar*, wenn es mindestens einen Fall gibt, in dem sie wahr ist. Solange eine Aussage also mindestens einmal wahr ist, ist die erfüllbar. Wenn eine Aussage eine Tautologie ist (also immer wahr), dann ist sie auch erfüllbar.

Kontingenz
Eine Aussage ist *kontingent*, wenn es Fälle gibt in denen sie wahr ist und solche, in denen sie falsch ist. Die Aussage '**Die Sonne scheint**' ist immer dann wahr, wenn die Sonne scheint - aber dann falsch, wenn die Sonne nicht scheint. Also ist diese Aussage kontingent.

Wetter	Die Sonne scheint
Die Sonne scheint	1
Die Sonne scheint nicht	0

Wie man der Wahrheitstafel entnimmt, ist die Aussage A in einem Fall wahr (erste Zeile) und in einem anderen falsch (zweite Zeile). Dementsprechend ist A kontingent.

Die Aussage (A ∧ B) ist in drei Zeilen falsch (immer dann, wenn eine der beiden Teilaussagen falsch sind) und in einem wahr. Dementsprechend ist (A ∧ B) kontingent (siehe Tabelle Konjunktion).

Kontingente Aussagen sind immer erfüllbar, weil es immer mindestens einen Fall geben muss in dem die Aussage wahr ist.

Kontradiktion

Eine *Kontradiktion* ist das Gegenstück einer Tautologie. Eine Aussage ist kontradiktorisch, wenn es keinen Fall gibt, in dem sie wahr ist. Anders ausgedrückt ist eine Kontradiktion immer falsch. Die Negation einer Tautologie ist eine Kontradiktion; *Es ist nicht der Fall, dass es entweder regnet oder nicht regnet* ist eine Aussage, die falsch ist, weil es immer entweder regnet oder nicht regnet. (A ∧ ¬A) ist eine Kontradiktion. Dies kann durch die entsprechende Wahrheitstafel überprüft werden:

A	A	∧	¬A
1	1	0	0
0	0	0	1

Es gibt keinen Fall in dem sowohl A als auch ¬A wahr sind, sodass die Konjunktion der beiden Teilaussagen immer falsch ist.

3.2 Aussagenlogik Teil B

3.2.1 Symbolinventar der aussagenlogischen Sprache

Die formale Sprache AL (kurz für Aussagenlogik) besteht aus folgendem Symbolinventar:

- **Aussagenzeichen**: A, B, C, ..., Z
- **Operatoren/Junktoren**: ¬, ∧, ∨, →, ↔
- **Klammern**: '(' und ')'

3.2.2 Die Syntax von AL

Nur die Ausdrücke, die den folgenden Grammatikregeln unserer formalen Sprache AL folgen, sind gültige Aussagen in unserem System, auch genannt *wohlgeformte Aussage*. Die folgenden Regeln sagen noch nichts über den Inhalt der Aussagen aus, sondern bloß über ihre Form.

1. Jedes Aussagenzeichen ist eine Aussage.
2. Ist ϕ eine Aussage, so ist auch $\neg\phi$ eine Aussage.
3. Sind sowohl ϕ als auch ψ Aussagen, so sind auch $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ und $(\phi \leftrightarrow \psi)$ Aussagen.

3.2.3 Die Semantik von AL

Auf Ebene der Semantik wird den Aussagen ein *Wahrheitswert* (kurz: WW) zugeordnet. Dieser kann entweder *wahr* oder $falsch$ sein. üblich ist die Notation mit 1 und 0. Jeder wohlgeformte Aussage kann ein WW zugeschrieben werden. Wir definieren das Bedeutungssystem unserer formalen Sprache wie folgt:

1. Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.
2. Für jede beliebige Aussage ϕ bzw. ψ gilt:

$$
\begin{aligned}
[\![\neg\phi]\!] &= \textit{gdw } [\![\phi]\!] = 0 \\
[\![\phi \wedge \psi]\!] &= 1 \textit{ gdw } [\![\phi]\!] = 1 \textit{ und } [\![\psi]\!] = 1 \\
[\![\phi \vee \psi]\!] &= 1 \textit{ gdw } [\![\phi]\!] = 1 \textit{ oder } [\![\psi]\!] = 1 \\
[\![\phi \rightarrow \psi]\!] &= 0 \textit{ gdw } [\![\phi]\!] = 1 \textit{ und } [\![\psi]\!] = 0 \\
[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!] &= 1 \textit{ gdw } [\![\phi]\!] = [\![\psi]\!]
\end{aligned}
$$

3.2.4 Aussagenlogische Grundbegriffe

a) **Tautologie:** Eine Aussage ϕ ist *tautologisch* gdw ϕ unter allen Bewertungen wahr ist.

b) **Erfüllbarkeit:** Eine Aussage ϕ ist *erfüllbar* gdw es Bewertungen gibt, unter denen ϕ wahr ist.

c) **Kontingenz:** Eine Aussage ϕ ist *kontingent* gdw es Bewertungen gibt, unter denen ϕ wahr ist und Bewertungen, unter denen ϕ falsch ist.

d) **Kontradiktion:** Eine Aussage ϕ ist ist *kontradiktorisch* gdw ϕ unter allen Bewertungen falsch ist.

3.2.5 De Morgan'sche Regeln

$$
\begin{aligned}
\neg(\phi \wedge \psi) &\leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi) \\
(\phi \wedge \psi) &\leftrightarrow \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\
\neg(\phi \vee \psi) &\leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi) \\
(\phi \vee \psi) &\leftrightarrow \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)
\end{aligned}
$$

Kapitel 4

Prädikatenlogik

Mit den Werkzeugen aus der Aussagenlogik können wir wunderbar an die Prädikatenlogik anknüpfen. Wir werden weiterhin Aussagen bilden, doch diese werden etwas komplexer sein. Zusammenhänge zwischen einzelnen Entitäten in unserer konstruierten Welt lassen sich mit Prädikaten und Funktionen darstellen, um die es in der Prädikatenlogik geht. So können wir einerseits akkurater Sachverhalte darstellen und es ist auch etwas spannender. Wir kennen dann nicht nur unsere Protagonisten, sondern auch deren Verwandte, Freunde, Leibgerichte, Wohnorte und so weiter. Aber da sind wir schon fast in den Beispielen. Nicht zu vergessen sind auch die Quantoren, mit deren Hilfe wir Aussagen über Gruppen von Entitäten anstellen können. So bleibt nichts übrig, was wir mit Hilfe der Prädikatenlogik nicht über unsere kleine Welt sagen können. Die Prädikatenlogik dient uns also als Baukasten, in den wir uns hiermit hineinstürzen.

4.1 Prädikatenlogik Teil A

Wenn wir die Aussagenlogik als ersten großen Stein unserer logischen Sprache betrachten, so ist die Prädikatenlogik der Stein, der auf diesem aufbaut. Einer der wichtigen Vorzüge der Prädikatenlogik im Vergleich zu der Aussagenlogik ist, dass mit ihr Quantifikation ausgedrückt werden kann. Wir können mit der Prädikatenlogik eine Aussage wie ‘Jedes Kind liebt Dinosaurier’ bilden und somit eine Aussage über alle Kinder machen (nämlich, dass sie die Eigenschaft besitzen, Dinosaurier zu lieben). Die Prädikatenlogik kann also als Erweiterung der Aussagenlogik verstanden werden, die in mehrfacher Hinsicht stärkere Flexibilität und Möglichkeiten bietet uns auszudrücken. Das System wird natürlich somit auch komplexer wachsen, aber wer sich mit Mut und Abenteuerlust auf diese Reise begibt, der wird auch reichlich belohnt. In der Prädikatenlogik empfiehlt es sich umso mehr, sich der formaleren Definition anzunehmen, nachdem man sich etwas sicherer mit einem Begriff fühlt. Mit zunehmender Vertrautheit der prädikatenlogischen Werkzeuge wird auch die logische Sprache als Ganzes begreifbarer und dem Leser hoffentlich in Zukunft dienen.

4.1.1 Funktionen in der Prädikatenlogik

Spätestens um die Fülle der Prädikatenlogik nachvollziehen zu können, muss man sich mit dem Begriff der *Funktion* auseinandersetzen. Eine *Funktion* ist eine Zuordnung von Elementen von einer Menge auf eine, nicht unbedingt von ihr verschiedenen, Menge ($X \to Y$). Wichtig ist nur noch, dass jedem Element von X genau einem Element von Y zugeordnet wird. Im Falle von $X \to Y$ spricht man bei der Menge X von dem *Definitionsbereich* der Funktion. Dem Definitionsbereich entspringen die Elemente, die zugeordnet werden. Y ist der *Wertebereich* der Funktion, also die Menge, auf die von X aus abgebildet wird. Eine Funktion stellt im allgemeinen eine Relation, Kausalität oder Wandel jeglicher Art zwischen Definitions- und Wertebereich dar. Wahrscheinlich sind dem Leser zumindest Funktionen, ausgedrückt als, $y = f(x)$ bekannt. In diesem Fall entspricht x einem Element des Definitionsbereiches und y eines des Zielbereichs, während f die Relation zwischen den beiden Mengen ausdrückt.

Ein konkretes Beispiel:

Beispiel 11.
$C = \{Mogli, Simba, Buzz\ Lightyear\}$
$M = \{Der\ König\ der\ Löwen, Toy\ Story, Das\ Dschungelbuch\}$

Wir können eine Funktion $f : C \to M$ definieren, die jedem Charakter seinen jeweiligen Film zuordnet:

Beispiel 12.
$f(Mogli)$ = Das Dschungelbuch
$f(Simba)$ = Der König der Löwen
$f(Buzz\ Lightyear)$ = Toy Story

4.1.2 Das Zeicheninventar der Prädikatenlogik

Bevor es zur Kombination mehrerer Symbole kommt, müssen einige neue Begriffe eingeführt und erklärt werden. Zur Bezeichnung von Objekten (*Individuen*) in der Welt, bedienen wir uns zwei unterschiedlicher Arten von Bezeichnungen: *Individuenkonstanten* und *Individuenvariablen*.

Individuenkonstante
Eine *Individuenkonstante* ist ein bestimmtes Objekt/Individuum der Welt. Wichtig ist, dass sich die Individuenkonstante (wie das Wort *konstant* andeutet) immer exakt auf ein Objekt bezieht. Beispielsweise kann festgelegt werden, dass sich die Individuenkonstante a auf den Dozierenden des Logik-Kurses an einer bestimmter Universität zu einem bestimmten Zeitpunkt bezieht. a kann sich demnach ab dieser Festlegung in diesem Fall nur noch auf diesen einen Dozierenden beziehen. a könnte natürlich nach belieben Aristoteles, die Katze eines Freundes oder Ash Ketchum bezeichnen.

Individuenvariable
Eine *Individuenvariable* ist ein Objekt/Individuum, dass nicht spezifiziert ist. Eine Individuenvariable kann also als ein Platzhalter für alle möglichen Individuen gesehen werden. Individuenvariablen werden häufig mit den letzten Buch-

staben des lateinischen Alphabets bezeichnet: x, y, z. Aber Achtung! Welcher Buchstabe verwendet wird, ist eigentlich egal, das heißt, ein x steht nicht in jedem Fall für eine Individuenvariable und ein a nicht immer für eine Individuenkonstante.

Grundsätzlich besteht in der Anwendung keine Verwechslungsgefahr zwischen Variablen und Konstanten, weil in der Prädikatenlogik immer von vornherein festgelegt werden muss, was eine Konstante/Variable ist.

4.1.3 Stelligkeit

Um über die Individuen sprechen zu können und ihnen Eigenschaften, Relationen oder weitere Spezifizierungen zuzuweisen, nutzt man in der Prädikatenlogik *Funktionskonstanten* und *Prädikatskonstanten*. Beide Typen von Konstanten nehmen eine festgelegte Anzahl von Argumenten auf, wie es auch in natürlichen Sprachen der Fall ist. Die Anzahl der Argumente, die eine Konstante aufnimmt, wird ihre *Stelligkeit* genannt. Intransitive Verben wie *gehen*, *schlafen* und *gewinnen*, so wie Substantive wie *Dinosaurier* und viele Eigenschaften wie *männlich* sind *einstellig*. In natürlichen Sprachen benötigen man also nur ein Objekt/Individuum um einen grammatischen Satz mit diesen Verben oder Substantiven zu bilden. Die Argumente können vereinfacht als Partizipanten innerhalb eines Sachverhalts angesehen werden.

(1) *Anna* geht/schläft/gewinnt

(2) *Littlefoot* ist ein Dinosaurier

(3) *Alex* ist männlich

Analog hierzu heißt *Zweistelligkeit*, dass zwei Individuen von dem jeweiligen Ausdruck benötigt werden, um einen grammatischen Satz zu bilden:

(4) *Alex* schlägt/liebt/kennt *Chris*

(5) *Alex* ist die Mutter von *Kim*

Ab einer *Dreistelligkeit* wird es etwas schwieriger Beispiele in natürlichen Sprachen zu finden. Ein Beispiel ist die Aussage *Anna isst Salat mit einer Gabel* mit den Individuen *Anna*, *Salat* und *Gabel*. Theoretisch können Funktions- oder Prädikatskonstanten mit jeder beliebigen Stelligkeit definiert. Da in der mathematischen Sprache eine beliebige Zahl oft mit n bezeichnet wird, können wir auf einer abstrakten Ebene von n-Stelligkeit sprechen.

4.1.4 Prädikatskonstanten

Eine *Prädikatskonstante* ist eine *Funktion*, die Elemente in den Zielbereich der Wahrheitswerte (null und eins) abbildet. Anders ausgedrückt nimmt eine Prädikatskonstante eins oder mehrere Individuen und weist ihnen einen Wahrheitswert zu. Je nachdem, ob das Prädikat, das durch die Funktion ausgedrückt wird, auf das Individuum zutrifft, ist die Prädikatskonstante wahr oder falsch. Prädikatskonstanten stellen eine Eigenschaft oder Relation zwischen Individuen/Objekten dar. Einige Beispiele von Prädikatskonstanten sind:

A) 1-stellige Prädikatskonstanten

a) geht(x): x geht

b) M(x): x ist männlich

B) 2-stellige Prädikatskonstanten

a) schlägt(x,y): x schlägt y

b) liebt(x,y): x liebt y

Zu beachten ist, dass in den Klammern die Anzahl der Argumente jeder Konstante durch die Individuenvariablen angezeigt wird. Wenn wir ein Individuum a als Alex festlegen, lautet *geht(a)*, übersetzt in unsere natürliche Sprache, *Alex geht* und *M(a)* entsprechend *Alex ist männlich*. Prädikatskonstanten erkennt man daran, dass gesagt werden kann, ob der gebildete Ausdruck wahr oder falsch ist. Für eine bestimmte Situation kann *geht(a)* wahr sein, in anderen ist sie falsch. Ebenso ist unter einer bestimmten Bewertung *M(a)* wahr, unter anderen Umständen ist *M(a)* falsch.

4.1.5 Funktionskonstanten

Eine *Funktionskonstante* ist eine *Funktion*, die Individuen von einer Menge, einer weiteren Menge von Individuen zuordnet. Anders ausgedrückt nimmt eine Funktionskonstante ein oder mehrere Objekte und weist ihnen ein anderes Objekt zu. Die Funktionskonstante bildet somit eine Beziehung zwischen Individuen. Einige Beispiele von Funktionskonstanten sind:

A) 1-stellige Funktionskonstanten:

a) heimat(x): die Heimat von x

b) mut(x): die Mutter von x

Im Kontrast zu den Prädikatskonstanten *liefern* Funktionskonstanten also keinen Wahrheitswert, sondern ein weiteres Individuum/Objekt. Wenn wir festlegen, dass a = *Alex* ist und g = *Ginger*, so entspricht *mut(a)* der Äußerung *Die Mutter von Alex*. Dieser Ausdruck einer Prädikatskonstanten steht also in diesem Fall für eine weitere Person. Wir können nicht danach Fragen, ob *mut(a)* wahr oder falsch ist (wie bei Prädikatskonstanten), sondern danach wer oder was es ist.

Da wir Funktionskonstanten grundsätzlich wie Individuenkonstanten behandeln können, können wir sie auch ineinander schachteln.

a) *heimat(mut(a))* entspricht

Die Heimat der Mutter von Alex

b) *heimat(mut(mut(a)))* entspricht

Die Heimat der Mutter der Mutter von Alex

c) *heimat(ki(mut(a),g))* entspricht

Die Heimat des Kindes der Mutter von Alex und Ginger

Bei der der letzten Konstruktion lässt sich auch einer der Vorzüge der formalen Sprache der Logik gegen die natürliche Sprache erkennen; sie ist eindeutig. Der Satz '*Die Heimat des Kindes der Mutter von Alex und Ginger*' kann folgendermaßen (miss-)verstanden werden:

a) *Die Heimat [[des Kindes der Mutter von Alex] und Ginger]*

   (Es ist die Heimat des Kindes der Mutter von Alex und es ist die Heimat von Ginger.)

b) *Die Heimat [des Kindes der [Mutter von Alex und Ginger]]*

   (Es ist die Heimat des gemeinsamen Kindes von der Mutter von Alex und Ginger.)

Die Logik hingegen liefert uns nur eine Interpretation (nämlich die zweite) und lässt somit keinen Raum für Mehrdeutigkeit.

Im Kontrast zu Funktionskonstanten können Prädikatskonstanten niemals so verschachtelt werden, weil dies gegen die Regeln zur Wohlgeformtheit der Prädikatenlogik verstößt, wie man an folgenden ungrammatischen Übersetzungen leicht erkennen kann:

(6) * *geht(L(a,g))* entspricht *Alex liebt Ginger geht*

(7) * *liebt(m(g),a)* entspricht *Ginger ist männlich liebt Alex*

Da aber Funktionskonstanten dem selben Typ zugehören wie Individuenkonstanten (da sie beide letztendlich für Individuen stehen), können diese auch in Prädikatskonstanten eingeführt werden:

(8) *liebt(g,heimat(a))*: *Ginger liebt die Heimat von Alex*

(9) *schlägt(ki(g),a)*: *Das Kind von Ginger schlägt Alex*

4.1.6 Junktoren in der Prädikatenlogik

Die bereits definierten Junktoren der Aussagenlogik werden auch in der Prädikatenlogik in derselben Art und Weise verwendet:

1. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Neu hinzu kommt das *Identitätprädikat* '=', welches eine zweistellige Prädikatskonstante darstellt. Sie entspricht dem wahrscheinlich jedem geläufigen Gebrauch des *Gleichheitszeichens* in der Mathematik. Für '$a = b$' gilt die Beziehung '*a ist gleich zu b*'. Da es sich um eine Prädikatskonstante handelt, werden die zwei Individuen auf die Wahrheitswerte *wahr* oder *falsch* abgebildet. Für Identitätssymbol gelten folgende Eigenschaften:

Substitution Wenn $a = b$, dann gilt für alle b dasselbe wie für alle a.

Reflexivität Für alle a gilt, $a = a$. (Tautologie)

Symmetrie Wenn $a = b$, dann gilt auch $b = a$.

Transitivität Wenn $a = b$ und $b = c$, dann gilt auch $a = c$.

4.1.7 Quantoren

Die bereits erwähnten Junktoren der Prädikatenlogik ergeben zwar ein ausdrucksvolles System, doch dieses ist nicht annähernd so reich, dynamisch und flexibel wie natürliche Sprachen. Durch das Einführung der Quantoren soll dieses Problem zum Teil behoben werden. Quantoren heißen so, weil sie $quantifizieren$, d.h. sie machen eine Aussage über Anzahlen von Objekten. Mit den bereits eingeführten Mitteln können (einzelne) Aussagen wie '*Horst ist ein Tyrannosaurus*' ($T - Rex(horst)$) gebildet werden, aber es kann keine Aussage darüber gemacht werden ob wir ausschließlich über Tyrannosaurier reden, ob alle Tyrannosaurier eine Eigenschaft gemeinsam haben oder ob jeder Tyrannosaurier ein Lieblingsessen hat. Hierzu dienen Quantoren.

Quantoren binden Variablen und beziehen sich auf alle ihre möglichen Werte. Sie gehören zusammen mit den Junktoren zu den Grundzeichen der Prädikatenlogik. Im folgenden werden zwei dieser Operatoren eingeführt: $\forall$ und $\exists$. Was für eine Funktion diese Symbole genau haben wird meist erst durch Beispiele deutlich. Zuerst müssen aber ein paar notationelle Erläuterungen zur Zusammensetzung quantifizierter Aussagen erwähnt werden.

Wie bereits erwähnt binden Quantoren Variablen. Beispielsweise bindet $\forall x$ die Variable x und $\exists y$ bindet y. Der jeweilige Quantor appliziert auf der spezifizierten Variable, die in einer dem Quantor folgenden Aussage (idealerweise) wieder erscheint. Für die (quantifizierte) Aussage $\forall x M(x)$ gilt also, dass das x in $M(x)$ durch den Quantor gebunden wird. Das erste Vorkommnis von x (direkt nach dem Quantor) sagt also bloß aus, dass das x, welches später folgt, gebunden ist, d.h. vom Quantor erfasst wird.

Beispiel 13.

1. $\forall x T - Rex(x)$ besteht aus dem Quantor $\forall$, der Variable x und der Aussage $T - Rex(x)$.
2. $\exists x Dino(x)$ besteht aus dem Quantor $\exists$, der Variable x und der Aussage $Dino(x)$.
3. $\forall y T - Rex(y)$ besteht aus dem Quantor $\forall$, der Variable y und der Aussage $T - Rex(y)$.
4. $\exists x (T - Rex(x) \wedge Dino(x))$ besteht aus dem Quantor $\exists$, der Variable x und der (komplexen) Aussage $T - Rex(x) \wedge Dino(x)$.

Allgemein gilt also, dass eine quantifizierte Aussage die Form $\forall x A$ bzw. $\exists x A$ hat, egal wie komplex A ist. Jedes Vorkommnis von x in A wird von dem jeweiligen Quantor beeinflusst.

Allquantor

Der *Allquantor* ($\forall$) entspricht meist im Gebrauch den natürlichsprachlichen Ausdrücken *alle, für alle gilt, usw.* Eine all-quantifizierte Aussage $\forall x P(x)$ ist genau dann wahr, wenn für *alle* x P gilt. Sobald P für ein x nicht gilt, ist die Aussage falsch. Es kann beispielsweise die Aussage $M(x)$ (x ist männlich) durch den Allquantor gebunden werden: $\forall x M(x)$ (für alle x gilt, dass sie männlich sind bzw. alle x sind männlich). Es wird also nicht mehr eine Aussage über ein einzelnes Individuum gemacht, sondern, im Falle des Allquantors, eine Aussage über alle Dinge in der betrachteten Welt. Die Aussage ist somit nur dann wahr, wenn alle Dinge über die wir sprechen, männlich sind.

Existenzquantor
Der *Existenzquantor* ($\exists$) entspricht meist im Gebrauch der natürlichsprachlichen Umschreibung *es gibt mindestens eine(n).* Eine existentiell-quantifizierte Aussage $\exists x P(x)$ ist genau dann wahr, wenn für *mindestens ein x P* gilt. Diese Aussage ist nur dann falsch, wenn P für kein x gilt. Es kann beispielsweise die Aussage $M(x)$ (x ist männlich) durch den Existenzquantor gebunden werden: $\exists x M(x)$ (es gibt mindestens ein x das männlich ist). Wenn unter den Objekten, über die wir sprechen, eins männlich ist, dann ist die quantifizierte Aussage wahr.

Skopus
Unter dem *Skopus* eines Quantors versteht man die Reichweite seines Einflusses im Binden von Variablen. Quantoren binden Variablen in ihm direkt folgenden Aussagen. Der Skopus von $\forall x P(x)$ ist $P(x)$ und der Skopus von $\exists y(Mut(y) \wedge M(y))$ ist $(Mut(y) \wedge M(y)$ (also alles, was in der Klammer ist). In all diesen Fällen ist jede Variable gebunden. Wenn alle Variablen gebunden sind, dann ist die Aussage auch eindeutig einem Wahrheitswert zuordbar. Die Aussage $\forall x P(x, y)$ dagegen enthält eine Variable, die nicht gebunden ist, da sie von keinem Quantor erfasst wird. Variablen die nicht gebunden sind werden *ungebunden* bzw. *frei* genannt.

Quantoren und Negation
Im Zusammenhang mit Quantifikation wird eine Unterscheidung zwischen innerer und äußerer Negation gemacht. *Innere Negation* bezeichnet eine Negation der Aussage, die im Skopus des Quantors liegt: $\exists x \neg P(x)$. *Äußere Negation* bezeichnet eine Negation, in dessen Skopus ein Quantor liegt: $\neg \exists x P(x)$. Im oben genannten Fall innerer Negation entspricht die Aussage '*Es gibt ein x für das P nicht gilt*'. Die äußere Negation negiert hingegen den Quantor, sodass ihre Übersetzung stark von der der inneren Negation abweicht; '*Es ist nicht der Fall, dass es ein x gibt für das P gilt*' oder anders ausgedrückt '*Kein x ist P*'. Dieser starke Unterschied lässt sich in gleichem Maße auch bei dem Allquantor finden. $\forall x \neg P(x)$ entspricht '*Für alle x gilt, dass kein x P ist*' und $\neg \forall x P(x)$ hingegen drückt aus, dass '*Nicht für alle x P gilt.* Bei näherer Betrachtung fällt auf, dass es eine Entsprechung zwischen innerer und äußerer Negation von quantifizierten Aussagen gibt:

1. $\forall x \neg P(x) \Leftrightarrow \neg \exists x P(x)$ (Für kein x gilt P)
2. $\forall x P(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg P(x)$ (Für alle x gilt P)
3. $\exists x \neg P(x) \Leftrightarrow \neg \forall x P(x)$ (Nicht für jedes x gilt P)
4. $\exists x P(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg P(x)$ (Für mindestens ein x gilt P)

4.2 Prädikatenlogik Teil B

Prädikate sind formal gesehen Funktionen und Funktionen sind Relationen und Relationen beinhalten n-Tupel. Deshalb wollen wir hier vom Kleinen ins Große gehen und mit n-Tupeln beginnen.

4.2.1 n-Tupel und Relationen

n-Tupel Ein n-Tupel ist eine geordnete, endliche Liste der Stelligkeit n, welche sich aus der Multiplikation von n Mengen miteinander ergibt, wobei $n \in \mathbb{N}_0$[1]. Für den Fall eines 2-Tupels (kurz: *Tupel*) bedeutet das, dass jedes Element einer Menge M_1 mit jedem Element einer Menge M_2 koordiniert wird, sodass $|M_1| \times |M_2|$ Paare entstehen. Jedes dieser Paare stellt ein Tupel dar. Man spricht bei einer solchen Paarbildung zwischen n Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ vom *Kartesischen Produkt* dieser Mengen – in Zeichen $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Die Elemente einer solchen Menge (der *Produktmenge*) sind alle bei der Multiplikation entstandenen n-Tupel. Die Elemente einer Menge $M_1 \times M_2 \times M_3$ nennt man *Tripel* und einer Menge $M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ *Quadrupel*. Bei $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, mit $n > 4$ spricht man von n-Tupeln. Die n-fache Produktbildung einer Menge M mit sich selbst kürzt man, analog zur Multiplikation etwa reeller Zahlen, als M^n ab.

Beispiel 14.
Gegeben seien zwei Mengen $M_1 = \{a, b, c\}$ und $M_2 = \{b, d\}$. Das Kartesische Produkt $A = M_1 \times M_2$ enthält $|M_1| \times |M_2| = 3 \times 2 = 6$ Elemente, nämlich die Tupel $\langle a, b \rangle$, $\langle a, d \rangle$, $\langle b, b \rangle$, $\langle b, d \rangle$, $\langle c, b \rangle$ und $\langle c, d \rangle$.

Anmerkung: Die obige Definition von n-Tupeln geschah nicht ohne Grund mit der Bemerkung, dass $n \in \mathbb{N}_0$. So lassen sich „einfache" Elemente von Mengen ohne Umstand als 1-Tupel auffassen. Weiter ist es teils praktikabel, Individuenkonstanten als 0-Tupel zu definieren. Davon wird hier aber kein Gebrauch gemacht werden.

Relationen Eine Relation bezeichnet, wie der Name schon vermuten lässt, eine Beziehung, die zwischen verschiedenen oder gleichen Mengen herrscht. Für eine Relation R gilt dabei $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Es ist eine Teilmenge (oder gleich), weil nicht alle n-Tupel der Produktmenge Teil der Relation sein müssen, sondern nur diejenigen, für die die Relation definiert ist. Ist ein n-Tupel a Element einer Relation R, dann sagt man, die Relation R *gilt* für a.

Beispiel 15.
Sei $S = \{s1, s2, s3\}$ eine Menge an S-Bahnen,
$H = \{\textit{wolkenkuckucksheim}, \textit{hintertupfingen}, \textit{kleinkleckersdorf}, \textit{posemuckel}\}$ eine Menge an Bahnhöfen und $R \subseteq S \times H$ eine Relation, die enthält, welche S-Bahn welchen Bahnhof ansteuert.
Für R gelte

$$R = \left\{ \begin{array}{l} \langle s1, \textit{wolkenkuckucksheim} \rangle, \\ \langle s2, \textit{kleinkleckersdorf} \rangle, \\ \langle s2, \textit{posemuckel} \rangle, \\ \langle s3, \textit{wolkenkuckucksheim} \rangle, \\ \langle s3, \textit{hintertupfingen} \rangle \end{array} \right\}$$

In diesem Fall gilt die Relation R beispielsweise für $\langle s2, kleinkleckersdorf \rangle$ oder $\langle s3, hintertupfingen \rangle$, nicht aber für etwa $\langle s2, wolkenkuckucksheim \rangle$.

[1] $\mathbb{N}_0$ steht für die Menge der natürlichen Zahlen inklusive der Null, also $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

4.2.2 Funktionen

Eine Funktion f ist so definiert, dass sie von einem *Definitionsbereich* A in einen *Wertebereich* B *abbildet* – in Zeichen $f : A \to B$. Sie werden deshalb auch als *Abbildung* von A nach B bezeichnet. Dabei wird jedem Element $x \in A$ genau ein Element in B zugeordnet – in Zeichen $x \mapsto f(x)$. Diese Definition ist ziemlich trivial, denn sie sagt lediglich aus, dass x auf ein Element in B abgebildet wird, welches durch die Funktion f festgelegt ist. Die genaue Semantik bleibt hier jedoch verborgen und ist in der Regel Teil der spezifischen Funktionsdefinition.

Beispiel 16.
Sei $H = \{nairobi, stockholm\}$ eine Teilmenge der Menge der Hauptstädte der Welt und $L = \{kenia, nepal, schweden\}$ eine Teilmenge der Menge der Länder der Welt. Sei f eine Funktion, die die Hauptstädte in H auf die Länder in L abbildet. Wir definieren:

$$f : H \to L$$

$$x \mapsto \begin{cases} kenia & \text{falls } x = nairobi \\ schweden & \text{falls } x = stockholm \end{cases}$$

In diesem Fall sind die Funktionswerte explizit definiert, im Rahmen eines konkreten Modells geschieht dies jedoch meist implizit. Man sieht auch, dass *nepal* gar nicht getroffen wird. Dies ist ohne Weiteres möglich, da die Existenzbedingung nur für den Definitionsbereich gilt.

Funktionen sind ein spezieller Fall von Relationen. Was sie von anderen Relationen unterscheidet sind zwei Bedingungen, die *Existenzbedingung* und die *Eindeutigkeitsbedingung*.

Existenzbedingung Die Existenzbedingung ist für eine Funktion $f : A \to B$ erfüllt, gdw. f *jedem* Element aus A ein Element aus B zuordnet.

Eindeutigkeitsbedingung Die Eindeutigkeitsbedingung ist für eine Funktion $f : A \to B$ erfüllt, gdw. f Elementen aus A *genau ein* Element aus B zuordnet.

Eine Funktion muss also für alle Elemente aus der Definitionsmenge gelten und ihnen genau ein Element aus der Wertemenge zuweisen. Für Relationen, die keine Funktionen sind, gelten diese Forderungen nicht zwingend.

Die Notation von Funktionen unterscheidet sich jedoch von der anderer Relationen. Wenn man von einer n-stelligen Funktion spricht, so handelt es sich streng genommen um eine $n+m$-stellige Relation mit einem m-Teiltupel, welcher als Wertebereich der Funktion dient. Das heißt, eine Funktion $f : N_1 \times \ldots \times N_n \to M_1 \times \ldots \times M_m$ ist äquivalent zu einer Relation $R \subseteq N_1 \times \ldots \times N_n \times M_1 \times \ldots \times M_m$, welche die Eindeutigkeits- und Existenzbedingung erfüllt.

4.2.3 Prädikate

Prädikate sind im Prinzip nichts anderes als Funktionen, die auf die Menge der Wahrheitswerte $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ abbilden. Ein Prädikat P nimmt ein Element $a \in A$ und weist ihm in Hinsicht auf eine Eigenschaft E einen Wert aus $\mathbf{2}$ zu – in

Zeichen:

$$P : A \to \mathbf{2}$$
$$a \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls E} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beachte, dass auch hier die Existenzbedingung nicht verletzt ist, auch wenn die Eigenschaft E nicht für alle $a \in A$ gilt, da die übrigen Elemente auf 0 abgebildet werden. Es gibt also keine Definitionslücken innerhalb von A.

In der Didaktik der Logik wird häufig zwischen ein- und mehrstelligen Prädikaten unterschieden und veranschaulicht, dass es sich bei einstelligen Prädikaten um Eigenschaften von Individuen handelt (z.B. *Tapfer(rosi)*) und bei mehrstelligen Prädikaten um Beziehungen zwischen Individuen (z.B. *Bruder(björn,björk)*). Formal gesehen gibt es hier aber keinen Unterschied. n-stellige (auch einstellige!) Prädikate sind n-stellige Funktionen in den Wertebereich $\mathbf{2}$. Für beliebige $x \in M_1 \times \ldots \times M_n$, ein Prädikat P und eine Relation R gilt daher $P(x_1, \ldots, x_n) = 1$ gdw. $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in R \subseteq M^n$, d.h. ein Prädikat ist nichts anderes als eine Funktion, die angibt, ob eine Relation R zwischen Elementen aus $M_1 \times \ldots \times M_n$ gilt oder nicht. Deshalb begegnet man Prädikaten auch häufig unter der Bezeichnung der *charakteristischen Funktion* einer Menge.

Beispiel 17.
Sei $E = \{\mathit{erdbeere}, \mathit{gurke}, \mathit{zucchini}, \mathit{ananas}\}$, $\mathit{Gemüse}, \mathit{Obst} : e \to \mathbf{2}$, $\mathit{Ähnlich} : E \times E \to \mathbf{2}$ und $x, y \in E$. Die Prädikate seien wie folgt definiert:

$$\mathit{Gemüse}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls x ein Gemüse ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathit{Obst}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls x Obst ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathit{Ähnlich}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls x und y sich ähnlich sehen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit gilt $\mathit{Gemüse}(x) = 1$ gdw. $x = \mathit{gurke} \vee x = \mathit{zucchini}$ und $\mathit{Gemüse}(x) = 0$ gdw. $x = \mathit{erdbeere} \vee x = \mathit{ananas}$. Die Überlegung der Bedeutung der anderen beiden Prädikate sei dem Leser überlassen.

4.2.4 Quantoren

Oben wurden schon Aussagen der Art getätigt, dass eine Eigenschaft für einige oder alle Elemente einer Menge gilt. Solche Aussagen lassen sich mittels *Quantoren* weiter formalisieren. Sei $x \in M$ und eine Aussage A gegeben, dann bedeutet $\exists x \in M : A$, dass es ein Element x in der Menge M gibt, für dass A gilt, und analog dazu $\forall x \in M : A$, dass A für alle x aus M gilt. A darf hier beliebig komplex sein, also auch selbst quantifizierte Aussagen enthalten. Dabei gilt, dass jede Variable innerhalb eines Ausdrucks durch einen Quantor *gebunden* sein muss, damit es sich um eine Aussage handeln kann. $P(x)$ ist daher keine Aussage, da sie syntaktisch (und eigentlich auch semantisch) nicht *wohlgeformt* ist. Tritt eine Variable x in einem Ausdruck auf, so muss also mindestens[2] etwas über die Existenz von x gesagt werden, damit der Ausdruck eine Aussage ist.

Beispiel 18.
Es gelte erneut $G = \{erdbeere, gurke, zucchini, ananas\}$, $Gemüse, Obst : E \to \mathbf{2}$ sowie $O, G \subseteq E$. Folgende Ausdrücke sind dann wohlgeformt und damit Aussagen (aber nicht alle sind wahr):

$$\forall x \in O : x \in E$$

$$\exists x \in E : Gemüse(x)$$

$$\neg \forall x \in E : Obst(gurke) \land \exists y \in O : y = ananas \neq zucchini$$

Folgender Ausdruck ist hingegen nicht wohlgeformt, weil er ungebundene Variablen enthält:

$$Obst(x) \land \neg Gemüse(y)$$

[2] *Mindestens* deshalb, weil $\forall x : A \Rightarrow \exists x : A$. Der Existenzquantor ist also der schwächste der beiden Quantoren.

Kapitel 5

Beweisführung

Da die Logik manchen Wissenschaftlern zufolge die *Lehre des vernünftigen Folgerns* ist, wird dieses Kapitel genau dieser Kunst gewidmet, die das Herz des logischen Systems darstellt. Bevor der Übergang zur Methodik möglich ist, müssen jedoch kurz ein paar weitere Termini erläutert werden.

5.1 Prämissen und Konklusion

Angenommen ein Student überlegt sich, dass er, wenn es morgen regnet, nicht in die Universität fahren wird. Am besagten Tag regnet es tatsächlich in Strömen. Auf die Frage, was der Student machen wird, wird man mit höchster Wahrscheinlichkeit antworten *nicht in die Universität fahren!*.

Dieser Prozess, von alter auf neue Information zu schließen, ist Menschen so geläufig, dass sie sich selten der Einzelheiten bewusst sind. Es ist aber wichtig, sich solche vereinfachten Fälle vor Augen zu führen, um später komplexe Schlüsse erkennen beziehungsweise ziehen zu können.

Man kann der Lesbarkeit halber das präsentierte Beispiel folgenderweise anordnen:

1	Wenn es regnet, fahre ich nicht in die Universität.
2	Es regnet.
3	Ich fahre nicht in die Universität.

Wenn die Information aus (1) und (2) als wahr angenommen wird, kann daraus geschlossen werden, dass auch (3) der Fall ist. (1) und (2) nennt man die *Prämissen* und (3) die *Konklusion* des Schlusses. Der Strich zwischen den Prämissen und der Konklusion symbolisiert (zur visuellen Emphase) deutlich die Trennung beider Typen von Aussagen. Eine *Prämisse* ist eine Aussage, die die Voraussetzung oder Annahme eines Schlusses bildet bzw. stützt. Die *Konklusion* ist das, was aus den Prämissen folgt bzw. das Endergebnis eines Schlusses.

5.2 Gültigkeit und Korrektheit

Die *Gültigkeit* eines logischen Schlusses ist dann gegeben, wenn es keine Bewertung gibt, unter der die Prämissen wahr und die Konklusion falsch ist. Ein Schluss ist demnach *ungültig*, wenn es Fälle gibt, in denen alle Prämissen wahr, die Konklusion aber falsch ist. Zu beachten ist, dass es sich bei der Frage, ob ein Schluss gültig ist, in erster Linie um eine strukturelle Frage handelt und nicht darum, ob die Prämissen oder die Konklusion *wirklich* wahr sind. Folgende Fälle sollen die Terminologie veranschaulichen:

5.2.1 Gültigkeit

(1) Putin ist ein Mensch, denn alle Menschen sind Säugetiere und Putin ist ein Säugetier.

Angenommen die Prämissen sind wahr (Alle Menschen sind Säugetiere, Putin ist ein Säugetier). In diesem Fall muss zur Klärung, ob es sich hierbei um einen gültigen Schluss handelt, geprüft werden, ob es zwingenderweise der Fall ist, dass wenn die Prämissen wahr sind, damit daraus auch die Konklusion (Putin ist ein Mensch) folgt. Dieser Schluss ist *nicht gültig*, weil Putin auch eine Beutelratte sein könnte (im Einklang mit den Prämissen, aber die Konklusion wäre falsch).

(2) Alle Menschen sind Säugetiere und Putin ist ein Mensch, dementsprechend ist Putin ist ein Säugetier.

Dasselbe Verfahren nutzen wir für den zweiten Schluss; kann die Konklusion falsch sein, wenn die Prämissen wahr sind? Nein, wenn die Eigenschaft *ein Säugetier zu sein* auf alle Menschen zutrifft und Putin ein Mensch ist, dann ist er auch ein Säugetier. Demnach handelt es sich bei dem zweiten Schluss um einen gültigen Schluss.

5.2.2 Korrektheit

Die *Korrektheit* eines Schlusses ist dann gegeben, wenn er *gültig* ist und dazu noch seine Prämissen wahr sind. Der zweite oben präsentierte Schluss ist sowohl gültig, als auch korrekt, weil die Prämissen des Schlusses wahr sind (natürlich mutmaßen und hoffen wir, dass Putin tatsächlich ein Mensch ist!).

(3) Alle Logiker sind reich. Da Putin ein Logiker ist, ist er reich.

Sofern wir informiert sind, ist Putin kein Logiker, aber der Schluss ist dennoch gültig. Angenommen die Prämissen sind wahr, dann gibt es keinen Fall in dem die Konklusion falsch ist. Dieser Schluss ist aber, im Kontrast zum zweiten, nicht korrekt, weil beide Prämissen falsch sind (es würde auch schon reichen, wenn nur eine nicht stimmen würde). Logiker sind durchaus nicht wegen ihrer angehäuften Reichtümer berüchtigt und Putin nicht durch seine wissenschaftlichen Beiträge zur Logik. Das Kriterium der Korrektheit ist somit, im Kontrast zur Gültigkeit, weniger struktureller Natur, sondern auf die Welt bezogen, auf der wir unsere Schlüsse basieren.

5.3 Formelle und informelle Beweise

Ein *Beweis* ist eine (meist schrittweise) Rechtfertigung, um zu zeigen, dass der gezogene Schluss wahr ist. Ein Beweis muss verständlich und überzeugend für jeden sein, der ein gefordertes Maß an Hintergrundwissen mit sich bringt. Als Hintergrundwissen sind im Fall der Logik das Verständnis der Syntax und Semantik der Junktoren, Quantoren, usw. vorauszusetzen. Oft sind für Beweise, also für den Schluss von den Prämissen auf die Konklusion, eine Anzahl an Zwischenkonklusionen von Nöten - bei jedem einzelnen dieser Schritte muss genau spezifiziert werden, weshalb er seine Richtigkeit hat.

Es wird zwischen zwei unterschiedlichen Beweistypen unterschieden: formale und informelle Beweise. Der Unterschied liegt hierbei aber nicht darin (wie man mutmaßen könnte), dass der informelle Beweis weniger rigoros wäre, sondern nur im Stil des Beweises.

Ein *informeller Beweis* wird meist für 'simplere' Beweise genutzt. Bei dieser Art von Beweisen ist die Form flexibler als bei den formalen Beweisen; offensichtliche Schritte können weggelassen werden und sie werden häufig auf einer natürlichen Sprache oder eine Mischung aus natürlicher Sprache und Logik dargelegt.

Angenommen man will beweisen, dass *Putin ist ein Säugetier* aus den Prämissen *Alle Menschen sind Säugetiere, Nur Menschen sind Präsidenten, Putin ist ein Präsident* folgt, so kann dies wie folgt informell beweisen werden:

Beweis 1.
Da Putin ein Präsident ist und nur Menschen Präsidenten sind, ist Putin ein Mensch. Putin ist ein Mensch und alle Menschen sind Säugetiere, woraus folgt, dass Putin ein Säugetier ist.

Ein *formeller Beweis* nutzt ein festes Inventar von Regeln, anhand derer Schritt für Schritt Schlüsse gezogen werden. Jede Anwendung einer Regel des Schließens sollte mit der entsprechenden Regel gekennzeichnet werden, damit der Beweis nachvollziehbarer ist. Im Folgenden werden die Methoden des formalen Schließens und die zugehörigen Regeln der Logik eingeführt.

5.3.1 Fitch-Kalkül

Das *Fitch-Kalkül* ist eine Methode, um Beweise in der Logik durchzuführen (bzw. eher darzustellen). Es handelt sich hierbei um einen Top-Down-Prozess, in dem schrittweise auf die Konklusion hingearbeitet wird. Jeder Schritt, abgesehen von der Anführung der Prämissen und Annahmen wird durch das Anführen der angewandten Regel gerechtfertigt. Ein Fitch-Kalkül ist wie folgt strukturiert:

1	$Prämisse_1$	
2	...	
3	$Prämisse_n$	
4	$Schluss_1$	REGEL: Zeile(n)
5	...	
6	$Schluss_n$	REGEL: Zeile(n)
7	$Konklusion$	REGEL: Zeile(n)

Ein waagerechter Strich trennt die Prämissen von der Konklusion. Alles was über dem waagerechten Strich ist, wird also als gegeben angenommen und alles, was sich unter ihm befindet, muss hergeleitet werden. Hierzu bedienen wir uns in der Logik bestimmter Regeln, die auf der jeweils rechten Seite des Erschlossenen notiert werden. Zusammen mit der entsprechenden Regel sollte auch die Zeile(n), auf die sie angewandt wurde, notiert werden.

Ziel des Unterfangens ist es also von den Prämissen zur Konklusion zu gelangen und somit zu beweisen, dass sie aus den Prämissen folgt (oder, dass dies nicht der Fall ist). Wenn durch die Anwendung einer Regel nicht direkt auf die Konklusion geschlossen werden kann, werden Zwischenschritte erschlossen, die zur Konklusion führen.

Unterbeweise

Ein *Unterbeweis* ist ein Beweis, der im Kontext eines Hauptbeweises als temporäre Annahme erscheint. Er beginnt, wie auch im Allgemeinen andere Beweise, mit einer Annahme, die vom Rest des Unterbeweises durch einen waagerechten Strich getrennt wird. Die Annahme, die im Unterbeweis gemacht wird, gilt aber nur in dem Unterbeweis selbst. Zur Veranschaulichung wollen wir die die Anwendung von Unterbeweisen bei konkreten Regelanwendungen, wie die der Disjunktionseliminierung, analysieren. Vorerst sei aber auf die Struktur eines Unterbeweises hingewiesen:

1	...		
2	...		
3		*Annahme*	*Beginn des Unterbeweises durch eine Annahme*
4		...	
5		....	*Ende des Unterbeweises*
6	...		

Regeln für Schlüsse der jeweiligen Junktoren

Um im Rahmen des Fitch-Kalküls sowohl mit atomaren, als auch komplexen Aussagen umgehen zu können, müssen einige Regeln für die Junktoren gelernt werden. Diese mögen auf den ersten Blick verwirrend sein, aber sie basieren auf keinen neuen Eigenschaften der Junktoren, sondern entsprechen ihrer bereits eingeführten wahrheitsfunktionalen Eigenschaften. Die hier zugrundegelegten Regeln basieren auf Barwise & Etchemendy (2008). Für jeden Junktor gibt es sowohl eine *Eliminierungs-* als auch eine *Einführungsregel. Eliminierungsregeln* (Elim) dienen der Entfernung des entsprechenden Symbols. Im Kontrast hierzu fügen *Einführungsregeln* (Intro) das entsprechende Symbol hinzu und bilden demnach komplexe Aussagen.

Regeln des Fitch-Kalküls

Identitätssymbol
Die *Identitätseinführung* (= Intro) kann jederzeit in einem Beweis eingeführt werden. Sie sagt aus, dass ein Term a identisch mit sich selbst ist ($a = a$). Mit Term ist gemeint, dass es sich hierbei um ein Individuum oder eine Funktionskonstante (die einem Individuum entspricht) handeln muss. Für diese Regel muss keine weitere Voraussetzung beachtet werden. Diese Regel wird auf keine vorherige Aussage angewandt.

Regel:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & \ldots & \\ 2 & a = a & \text{=Intro} \end{array}$$

Die *Identitätseliminierung* (= Elim) entspricht der Einsetzung eines Terms a durch b, solange dieser im Beweis vorkommt (z.B. als $P(a)$) und wir im Beweis auch wissen, dass $a = b$. Es handelt sich also bloß um eine Ersetzung von $P(a)$ durch $P(b)$, wenn unser Beweis aufzeigt, dass $a = b$. Bei dieser Regel müssen demzufolge zwei Zeilen angegeben werden.

Regel:

$$\begin{array}{r|ll} 1 & P(a) & \\ 2 & a = b & \\ 3 & P(b) & \text{=Elim: 1,2} \end{array}$$

Konjunktion
Die *Konjunktionseinführung* ($\wedge$ Intro) fügt zwei oder mehr Ausdrücke zusammen, vorausgesetzt sie wurden einzeln bereits im Beweis angeführt. Wenn $A_1, ..., A_n$ bewiesen wurden, so können sie mit der Konjunktionseinführung zu $A_1 \wedge ... \wedge A_n$ zusammengefügt werden. Es müssen die Zeilen angeführt werden, aus denen die einzelnen Konjunkte entstammen (und dort jeweils allein stehen). Sie müssen nicht hintereinander im Beweis vorkommen und die Reihenfolge ist von keinerlei Relevanz.

Regel:

1	...	
2	A	
3	...	
4	B	
5	$A \wedge B$	$\wedge$Intro: 2, 4

Die *Konjunktionseliminierung* ($\wedge$ Elim) erlaubt es, eine Konjunktion aufzulösen, sodass ein Element der Konjunktion alleine steht. Wenn $A_1 \wedge ... \wedge A_n$ im Beweis vorkommen, kann also durch Anwendung der Konjunktionseliminierung A_1 alleine stehen. Es muss die Zeile angegeben werden, in der die Konjunktion steht, aus der man das Konjunkt zieht.

Regel:

1	...	
2	$A \wedge B$	
3	...	
4	A	$\wedge$Elim: 2

beziehungsweise

1	...	
2	$A \wedge B$	
3	...	
4	B	$\wedge$Elim: 2

Disjunktion

Die *Disjunktionseinführung* ($\vee$ Intro) erlaubt es von einem Ausdruck A zu seiner Disjunktion mit einem beliebigen (!) Ausdruck (sei er komplex oder atomar) zu schließen. Also kann, wenn im Beweis A vorkommt, mit Anwendung dieser Regel beispielsweise auf $A \vee B$ geschlossen werden. Diese Regel scheint auf den ersten Blick willkürlich und unbegründet zu sein, aber sie ergibt sich direkt aus den Eigenschaften der Disjunktion. Wenn wir A schon bewiesen haben (d.h. A ist wahr), so ist es egal mit was für einer weiteren Aussage A verknüpft wird, denn die Disjunktion wird immer dann wahr sein, solange eines der beiden Disjunkte wahr ist.

Es muss die Zeile angegeben werden, in der das bereits bewiesene Disjunkt vorkommt.

Regel:

1	...	
2	A	
3	...	
4	$A \vee B$	$\vee$Intro: 2

beziehungsweise

1	...	
2	A	
3	...	
4	$B \vee A$	$\vee$Intro: 2

Die *Disjunktionseliminierung* ($\vee$ Elim) erlaubt es von einer Disjunktion $A_1 \vee ... \vee A_n$ auf einen Ausdruck S zu schließen, gdw. S aus jedem der einzelnen Disjunkte folgt. Wenn wir also beweisen wollen, dass C aus der Disjunktion $A \vee B$ folgt, so müssen folgende Schritte unternommen werden: (I) Es muss angenommen werden, dass A wahr ist und für diese Annahme ein Unterbeweis erfolgen, in dem aus A C folgt und (II) es muss angenommen werden, dass B wahr ist und für diese Annahme ein Unterbeweis erfolgen, in dem aus B C folgt. Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, dann folgt aus $A \vee B$ der Ausdruck C. Für die Anwendung dieser Regel muss (a) die Zeile, in der die Disjunktion vorkommt, (b) der erste Unterbeweis und (c) der zweite Unterbeweis angegeben werden. Die Reihenfolge der Unterbeweise spielt hierbei keine Rolle.

Regel:

1	$A \vee B$		
2	...		
3		A	*Annahme, dass A wahr ist und aufgezeigt, dass daraus C folgt*
4		...	
5		C	*Ende des Unterbeweises, weil C aus der Annahme folgt*
6		B	*Annahme, dass B wahr ist und aufgezeigt, dass daraus C folgt*
7		...	
8		C	*Ende des Unterbeweises, weil C aus der Annahme folgt*
9	C		$\vee$ Elim: 1, 3-5, 6-8

Widerspruch

Die *Widerspruchseinführung* ($\perp$ Intro) erlaubt es einen Widerspruch zu markieren. Wenn ein Beweis (oder Unterbeweis) eine Formel ϕ und dessen Negation $\neg\phi$ aufweist, kann durch Anwendung dieser Regel der Beweis als kontradiktorisch bezeichnet werden. Diese Regel wird vor allem in Bezug auf Unterbeweise genutzt, um zu zeigen, dass eine gewisse Annahme zu einem Widerspruch führt. Es müssen beide Zeilen angegeben werden, die sich widersprechen.

Regel:

1	...	
2	A	
3	...	
4	$\neg A$	
5	$\bot$	$\bot$Intro: 2,4

Die *Widerspruchseliminierung* ($\bot$ Elim) erlaubt es von einem eingeführten Widerspruch auf eine beliebige Aussage zu schließen. Aus einer Kontradiktion folgt alles (aufgrund der Eigenschaften der Implikation). Es muss nur die Zeile angegeben werden, in der die Kontradiktion erschlossen wurde.

Regel:

1	...	
2	$\bot$	
3	...	
4	A	$\bot$Elim: 2

Negation

Die *Negationseinführung* ($\neg$ Intro) erlaubt es auf $\neg A$ zu schließen, wenn in einem Unterbeweis aufgezeigt wurde, dass die Annahme von A zu einem Widerspruch führt. Sie entspricht somit der Methode des *indirekten Beweises*. Da es sich hierbei um eine Regel handelt, die von einem Widerspruch gebrauch macht ($\bot$ Intro), benötigt ihre Anwendung auch diese Regel. Für die Negationseinführung werden die Zeilen des Unterbeweises angegeben, die von der Annahme zum Widerspruch führen.

Regel:

1	...		
2		A	*Annahme von A, um aufzuzeigen, dass dies einen Widerspruch erzeugt*
3		...	
4		$\bot$	*Ende des Unterbeweises, weil A zum Widerspruch führt*
5	$\neg A$		$\neg$Intro: 2-4

Die *Negationseliminierung* ($\neg$Elim) erlaubt es von einer doppelten Negation der Form $\neg\neg A$ auf A zu schließen. Es handelt sich hierbei also um eine relativ triviale Umformung von Ausdrücken. Es muss die Zeile angegeben werden, aus der die doppelte Negation stammt.

Regel:

1	$\neg\neg A$	
2	...	
3	A	$\neg$ Elim: 1

Subjunktion
Die *Subjunktionseinführung* ($\rightarrow$Intro) erlaubt es eine Aussage der Form $A \rightarrow B$ aus der Tatsache zu schließen, dass B aus A folgt. Folglich muss in einem Unterbeweis angenommen werden, dass A der Fall ist und aufgezeigt werden, dass dann B gilt. Wenn dies bewiesen ist, lässt sich aufgrund von $\rightarrow$Intro die Aussage $A \rightarrow B$ überführen. Es müssen alle Zeilen des entsprechenden Unterbeweises angeführt werden.

Regel:

1	$\quad\vert\ \underline{A}$	
2	$\quad\vert\ \ldots$	
3	$\quad\vert\ B$	
4	$A \rightarrow B$	$\rightarrow$Intro: 1-3

Die *Subjunktionseliminierung* ($\rightarrow$Elim) oder *Modus ponens* erlaubt es aus einer Aussage der Form $A \rightarrow B$ und A, die Aussage B zu beweisen. Anders ausgedrückt sagt diese Regel aus das, wenn $A \rightarrow B$ wahr ist und auch A wahr ist, daraus folgt, dass auch B wahr ist. Zur Anwendung dieser Regel müssen zwei Zeilen angeführt werden: (I) die Subjunktionsregel und (II) das erste Glied der Subjunktion.

Regel:

1	$A \rightarrow B$	
2	...	
3	A	
4	...	
5	B	$\rightarrow$Elim: 1, 3

Bijunktion
Die *Bijunktionseinführung* ($\leftrightarrow$Intro) entspricht einer doppelten Subjunktionseinführung. Um $A \leftrightarrow B$ zu beweisen, muss einerseits bewiesen werden, dass $A \rightarrow B$ gilt und anderseits, dass $B \rightarrow A$ gilt. Dementsprechend müssen zwei Unterbeweise geführt werden. Einer in dem aufgezeigt wird, dass aus der Annahme von A die Aussage B folgt, und eine die aufzeigt, dass die Annahme von B auf A schließen lässt. Beide Unterbeweise werden bei der Anwendung dieser Regel komplett zitiert.

Regel:

1	$\vert\ A$	
2	$\vert\ ...$	
3	$\vert\ B$	
4	$\vert\ B$	
5	$\vert\ ...$	
6	$\vert\ A$	
7	$A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow$Intro: 1-3, 4-6

Die *Bijunktionseliminierung* ($\leftrightarrow$Elim) erlaubt es von einer Bijunktion ($A \leftrightarrow B$) und einem ihrer Teile (entweder A oder B) auf das andere Teil zu schließen (A beziehungsweise B). Es müssen zwei Zeilen angegeben werden: (I) die Bijunktionregel und (II) das einzelne Vorkommnis einer der beiden Teilaussagen der Bijunktion.

Regel:

1	$A \leftrightarrow B$	
2	...	
3	A	
4	...	
5	B	$\leftrightarrow$Elim: 1, 3

beziehungsweise

1	$A \leftrightarrow B$	
2	...	
3	B	
4	...	
5	A	$\leftrightarrow$Elim: 1, 3

5.3.2 Beweismethoden

Im folgenden werden die drei wohl prominentesten Beweismethoden präsentiert. Sie werden meist im Zusammenhang mit dem Fitch-Kalkül präsentiert, doch sie sind natürlich für jegliche Form formaler und informaler Beweise nützlich. Jede Beweismethode hat eine bestimmte Form, in der die jeweiligen Prämissen und Konklusionen in Szene gesetzt werden können um den Beweis durchzuführen.

Direkter Beweis

Der *direkte Beweis* ist die wohl simpelste Methode um einen Konditional zu beweisen. In diesem Werk wurde er bereits mehrfach verwendet, doch trotz seiner

Simplizität soll er hier aufgrund seiner Kraft eingeführt werden. Ein Konditional hat die Form $P \Rightarrow Q$ und folgende möglichen Wahrheitswerte:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Wenn P falsch ist, ist $P \Rightarrow Q$ automatisch wahr, also kann dieser Fall von vorn herein außer Acht gelassen werden. Der wichtige Fall also, ist, wenn P wahr ist. Für diesen Fall muss bewiesen werden, dass Q zwingend folgt. Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Form des direkten Beweises:

Form des direkten Beweises
Satz: Wenn P, dann Q

Beweis 2.

$Angenommen\ P$

...

...

...

$Demzufolge\ Q$

Es muss also angenommen werden, dass P der Fall ist und dann im Laufe des Beweises, dass aus den dargelegten Schritten Q folgt.

Kontraposition
Eine *Kontraposition* ist eine Methode, die grundsätzlich demselben Schema wie der direkte Beweis nutzt. Oft ist es aber einfacher auf die Kontraposition auszuweichen. Sie basiert auf die Tatsache, dass $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$, d.h., dass sie einem direkten Beweis sehr ähnlich ist. Es wird gezeigt, dass die Negation der Prämissen aus der Negation der Konklusion folgt. Dies kann durch eine Wahrheitstafel überprüft werden:

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Was uns zu folgender Beweisstruktur führt:

Form der Kontraposition
Satz: Wenn ¬Q, dann ¬P

Beweis 3.

$Angenommen\ \neg Q$

...

...

...

$Demzufolge\ \neg P$

Beweis durch Widerspruch
Ein *Beweis durch Widerspruch* kann genutzt werden, um jegliche Arten von Aussagen zu beweisen. Die grundlegende Idee besteht darin aufzuzeigen, dass die Konklusion wahr sein muss, weil sonst ein Widerspruch entsteht. Um dies zu bewerkstelligen wird das Gegenteil, also die Negation, der Konklusion angenommen und gezeigt, dass diese zu einem Widerspruch (⊥) führt. Der Beweis durch Widerspruch hat folgende Struktur:
Form des Beweises durch Widerspruch
Satz: P

Beweis 4.

$Angenommen\ \neg P$

...

...

$\perp$

$Demzufolge\ \neg\neg P$

$Also; P$

Der Beweis durch Widerspruch nutzt dementsprechend die Bereits eingeführten Regel ⊥Intro und ¬Intro.